-

Actes du troisième colloque de l'Association de Didacticiens des Mathématiques Africains

ADiMA 3
Tunisie 2022

Approche interdisciplinaire dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques :

Quels projets et quels enjeux pour l'Afrique?

Actes édités par

Adolphe Cossi ADIHOU, Université de Sherbrooke (Canada / Bénin)

Faïza CHELLOUGUI, Faculté des Sciences de Bizerte – Université de Carthage (Tunisie)

Approche interdisciplinaire dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : Quels projets et quels enjeux pour l'Afrique?

Actes du troisième colloque ADiMA

Edités par

Adolphe Cossi Adihou

Faïza Chellougui

**avec l'appui des membres du comité scientifique
et des responsables des groupes de travail**

Tunisie (Hammamet) – 15 au 20 août 2022

Table des matières

INTRODUCTION

Le colloque ADIMA 3 se situe dans les activités de l'Association de Didacticiens des Mathématiques Africains (ADIMA) reconnu comme une conférence régionale de l' International Commission of Mathematical Instruction (ICMI). Le colloque vise à contribuer au développement de la recherche en didactique des mathématiques et des sciences et des techniques à tous les niveaux de l'enseignement, avec un souci particulier pour le développement de nouvelles recherches et pour le dialogue avec les mathématiciens, les physiciens, les informaticiens, les mécaniciens, etc. D'une envergure internationale et le colloque ADiMA 3 s'adressait aux chercheurs, formateurs et enseignants qui s'intéressent aux mathématiques et à leur enseignement et à son apprentissage. Le pari de ce troisième colloque scientifique d'ADiMA est de réfléchir sur la question de l'interdisciplinarité par le biais du thème suivant : **Approche interdisciplinaire dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : quels projets et quels enjeux pour l'Afrique ?**

Le colloque a été une occasion d'échanges et de partage. A ce titre, l'objectif principal du colloque est aussi de pérenniser les rencontres biannuelles et de créer un espace d'échanges fructueux, de débats nourris scientifiquement, des réflexions profondes et riches autour de questions vives qui se posent à la didactique des mathématiques en Afrique. Il s'agit entre autres à la place de la didactique des mathématiques dans la formation des enseignants en Afrique et les apports des résultats de la recherche en didactique des mathématiques pour le développement de la pratique enseignante (édition 2022). Le colloque d'ADiMA 3 a pour sa part porté un regard scientifique sur l'interdisciplinarité dans l'enseignement et la recherche en mathématique et en didactique des mathématiques en Afrique. Le colloque a donné ainsi l'occasion d'analyser et de questionner le thème « **Approche interdisciplinaire dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : quels projets et quels enjeux pour l'Afrique ? »** autour de différents axes qui sont développés dans quatre groupes de travail en lien avec les sous-thèmes suivants:

A. Les rapports entre mathématiques et le concret, les mathématiques et les autres disciplines (GT1)

La simple question de l'utilité des mathématiques pour « autre chose » est légitime et interpelle sur ce que les rapports entre les mathématiques et le réel, les mathématiques et les autres disciplines peuvent apporter pour l'apprentissage des élèves.

L'enseignement des mathématiques a tout à gagner d'une approche interdisciplinaire à partir du moment où celle-ci est justifiée. Pour exister, l'interdisciplinarité a besoin de travailler au milieu de disciplines identifiées. Ceci peut aider à structurer les savoirs et permettre à l'école de montrer aux élèves qu'une même question peut être abordée de diverses façons et avec différents points de vue. Apprendre aux élèves d'identifier les domaines auxquels pourrait se rattacher telle ou telle question permet de les orienter vers les savoirs en jeu et engager, en conséquence, les processus appropriés pour résoudre des situations d'enseignement /apprentissage.

B. Conditions permettant la réalisation du projet de l'interdisciplinarité (GT2)

Connaitre les rouages d'une démarche interdisciplinaire n'en garantit pas sa réussite. Pour cette raison nous nous intéressons ici aux facteurs qui conditionnent l'avancée du projet de l'interdisciplinarité. Les relations enseignant, élève, savoir mathématique et autres disciplines, milieu-contexte jouent un rôle essentiel pour l'édifice de ce projet. Ces différentes relations évoquées invitent à accorder une place importante aux différents contenus des disciplines tout en prenant en compte leurs spécificités et les contextes dans lesquels ils se déploient. Cette dimension non négligeable de l'interdisciplinarité invite à se questionner entre autres sur la formation disciplinaire et didactique des enseignants qui conduisent ce projet tant dans les lieux de formation des maitres que dans les écoles.

C. Formation des enseignants et le projet de l'interdisciplinarité (GT3)

Un travail assez important est prévisible pour former les enseignants au projet de l'interdisciplinarité puisqu'une formation sur l'appropriation des techniques de collaboration, d'analyse et de maîtrise des programmes des différentes disciplines en interrelation avec les mathématiques s'imposent. (Musique-Mathématiques, Langue-Mathématiques, Physique-Mathématiques, Informatique-Mathématiques, Intelligence artificielle-Mathématiques, Réalité augmentée-Mathématiques, Chimie-Mathématiques, Géographie-Mathématiques, etc.). Quelles situations mettre en place pour donner du sens à la même notion dans différents domaines où elle est évoquée ? Il s'agit de situations qui génèrent du sens dans différents contextes, différents sens, significations, statuts qu'on peut donner à une notion selon le contexte, le domaine d'étude.

D. Dimensions historique, épistémologique, philosophique, idéologique et culturelles dans le projet de l'interdisciplinarité (GT4)

Plusieurs recherches en apprentissage et enseignement des disciplines ont mis en évidence la pertinence des approches historiques et philosophiques. D'autres recherches qui s'intéressent à la didactique des disciplines prennent en compte plusieurs dimensions et plusieurs théories. Dans le sens où la didactique des disciplines fait appel à l'analyse des contenus disciplinaires et mobilise des théories issues de la psychologie, de la pédagogie entre autres. Ces théories qui sont convoquées mettent en évidence les dimensions historiques, épistémologiques, philosophiques, idéologiques et culturelles. Ainsi les didactiques des disciplines elles-mêmes sont un espace d'interdisciplinarité. Dans le cadre du projet d'interdisciplinarité à l'école ainsi que dans le cadre de la formation des enseignants comment se manifestent ces dimensions et quelle est l'importance de les prendre en compte dans le projet de l'enseignant ?

LES COMITÉS

Bureau Exécutif

Président : Adolphe ADIHOU (Université de Sherbrooke, Québec, Canada)

Secrétaire : Judith SADJA NJOMGANG (École Normale Supérieure de Yaoundé, Cameroun)

Trésorier : Alexandre MOPONDI BENDEKO MBUMBU (Université Pédagogique Nationale de Kinshasa, République Démocratique du Congo**)**

Comité local d'organisation

Président : Rahim KOUKI (Université de Tunis el Manar-IPEIM)

Président d'honneur : Mahdi ABDELJAOUAD (Université de Tunis-Tunis)

Vice-Président : Imed KILANI (Université Virtuelle de Tunis-ISEFC)

Membres :

Riadh ROBBENA (Université de Carthage-Tunis)
Sonia BEN OTHMEN (Université de Tunis El Manar-Tunis)
Karim BOULABIAR (Université de Tunis El Manar-Tunis)
Noamen REBAI (Université de Tunis el Manar)
Mohamed BELDI (Université de Tunis el Manar-Tunis)
Marwa HADDED (Université de Carthage-Tunis)
Mounir DHIEB (Université de la Manouba-Tunis)
Samia OUESLATI (Université Virtuelle de Tunis-Tunis)
Adel FRIDHI (Université de Carthage-Tunis)
Tesnim KERAIEM (Université de Tunis el Manar-Tunis)
Rihab RIAHI (Université de Tunis el Manar-Tunis)
Inen AKROUTI (Université de Carthage-Tunis)
Rim MAJDOUB EL FEHRI (Université de Tunis el Manar-Tunis)
Asma ERRAIS (Université Virtuelle de Tunis)
Leila ELHAJ (Université Virtuelle de Tunis)

Comité international du programme scientifique

Président : Adolphe ADIHOU (Université de Sherbrooke, Québec, Canada)

Vice-Présidente : Faïza CHELLOUGUI (Faculté des Sciences de Bizerte–Université de Carthage)

Membres

Parfait ABBY-M'BOUA (École Normale Supérieure d'Abidjan - Côte d'Ivoire)
Gervais AFFOGNON (Université d'Abomey-Calavi – IMSP - Bénin)
Saddo AG ALMOULOUD (Pontifícia Universida de Católica de São Paulo - Brésil)
Morou AMIDOU (Université de Niamey - Niger)
Didier ANAGO (Université d'Abomey-Calavi – IMSP – Bénin)
Kouadio Yeboua Germain ATTA (École Normale Supérieure d'Abidjan - Côte d'Ivoire)
Sonia BEN NEJMA (Université de Carthage - Tunisie)
Rachid BEBBOUCHI (Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene - Algérie)
Abdellah EL IDRISSI (École Normale Supérieure-Université Cadi Ayyad - Maroc)
Patrick GIBEL (Université de Bordeaux - France)

Ghislaine GUEUDET (Université Bretagne Occidentale - France)
Faten KHALLOUFI (Université de Carthage - Tunisie)
Imed KILANI (Université Virtuelle de Tunis-Tunisie)
Koffi Pierre KOUAME (École Normale Supérieure d'Abidjan - Côte d'Ivoire)
Jeanne KOUDOGBO (Université de Sherbrooke - Canada)
Mirène LARGUIER (Université de Montpellier - France)
Myismail MAMOUNI (CPGE CRMEF Rabat - Maroc)
Alexandre MOPONDI BENDEKO. (Université Pédagogique Nationale Kinshasa - RDC)
Teresa Bixirão NETO (University of Aveiro - Portugal)
Judith NJOMGANG NGANSOP (École Normale Supérieure de Yaoundé - Cameroun)
Eugène OKÉ ((Université d'Abomey-Calavi – IMSP - Bénin)
Ouahiba CHERIKH SI SABER (Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene - Algérie)
Éric RODITI (Université de Paris - France)
Mamadou Souleymane SANGARE (École. Normale Supérieure de Bamako - Mali)
Moussa Mohamed SAGAYAR (École. Normale Supérieure de Niamey - Niger)
Timbila SAWADOGO (Université de Koudougouu - Burkina Faso)
Moustapha SOKHNA (Universite Cheikh Anta Diop de Dakar - Sénégal)
Hassane SQUALLI (Université de Sherbrooke - Québec)
Floriane WOZNIAK (Université de Montpellier - France)

PRÉSENTATION DES ACTIVITÉS SCIENTIFIQUES

Le troisième colloque d'ADiMA a été meublé par des conférences, une table ronde, des ateliers, des séminaires, des communications et dans laquelle sont débattues certaines questions liées à l'interdisciplinarité, entre autres, les avantages et les limites d'une approche interdisciplinaire. Le colloque a été clôturé par une assemblée générale d'ADiMA qui a permis d'officialiser le pays hôte pour l'édition 2024.

Conférences Plénières

Cinq conférences ont meublé les sessions plénières en lien avec les quatre axes du colloque. Elles ont permis aux participants d'échanger avec les conférenciers.

Conférence 1 : Faire vivre les articulations entre abstrait et concret dans la classe de mathématique - un levier pour penser les rapports entre mathématiques et réalité. Viviane DURAND-GUERRIER (Université de Montpellier)

Conférence 2 : États de lieux de la didactique des mathématiques en Tunisie. Imed KILANI (Université Virtuelle de Tunis – ISEFC) & Rahim KOUKI (Université de Tunis el Manar– IPEIM)

Conférence 3 : Problématique d'une approche interdisciplinaire pour l'enseignement des mathématiques. Fernand MALONGA (Université Marien Ngouabi – ENS – Brazzaville)

Conférence 4 : Un lien entre les mathématiques et le concret : MathenJelaba. Rachid BEBBOUCHI (Université des Sciences et Technologies Ho-uari Boumediene – Algérie)

Conférence 5 : La résolution de problèmes comme objet d'enseignement ou comme outil pour l'enseignement des mathématiques – Aperçu de travaux à Genève à différents niveaux scolaires. Jean-Luc DORIER (Université de Genève)

Table Ronde

Une table ronde a permis de débattre autour du thème du colloque selon différente entrées. Son objectif principal est de lancer un débat avec les chercheures et les chercheurs autour du thème du colloque.

Animateurs :

Faïza CHELLOUGUI (Faculté des Sciences de Bizerte–Université de Carthage)
Jean-Luc DORIER (Université de Genève)
Jeanne KOUDOGBO (Université de Sherbrooke)
Fernand MALONGA (Université Marien Ngouabi–ENS–Brazzaville)

Groupes de Travail (GT)

Quatre Groupes de travail (GT1, GT2, GT3, GT4) en lien avec les quatre axes du colloque ont permis aux participants de présenter des communications orales. Ils sont programmés sur trois plages horaires. L'organisation permet aux participants à ADiMA 3 d'assister à un seul Groupe de Travail pendant le colloque selon leur choix.

Description Groupe de travail 1 – Les rapports entre les mathématiques et le concret, les mathématiques et les autres disciplines

Responsables :
Sonia BEN NEJMA (Faculté des Sciences de Bizerte – Université de Carthage)
Viviane DURAND-GUERRIER (Université de Montpellier)

Description. La simple question de l'utilité des mathématiques pour « autre chose » est légitime et interpelle sur ce que les rapports entre les mathématiques et le réel, les mathématiques et les autres disciplines peuvent apporter pour l'apprentissage des élèves.
L'enseignement des mathématiques a tout à gagner d'une approche interdisciplinaire à partir du moment où celle-ci est justifiée. Pour exister, l'interdisciplinarité a besoin de travailler au milieu de disciplines identifiées. Ceci peut aider à structurer les savoirs et permettre à l'école de montrer aux élèves qu'une même question peut être abordée de diverses façons et avec différents points de vue. Apprendre aux élèves d'identifier les domaines auxquels pourrait se rattacher telle ou telle question permet de les orienter vers les savoirs en jeu et engager, en conséquence, les processus appropriés pour résoudre des situations d'enseignement /apprentissage.

Description Groupe de travail 2 – Conditions permettant la réalisation du projet de l'interdisciplinarité

Responsables :

Imed KILANI (ISEFC – Université Virtuelle de Tunis)
Rachid BEBBOUCHI (Université des Sciences et Technologies Houari Boumediene – Algérie)
Jeanne KOUDOGBO (Université de Sherbrooke – Canada)

Description. Connaitre les rouages d'une démarche interdisciplinaire n'en garantit pas sa réussite. Pour cette raison nous nous intéressons ici aux facteurs qui conditionnent l'avancée du projet de l'interdisciplinarité. Les relations enseignant, élève, savoir mathématique et autres disciplines, milieu-contexte jouent un rôle essentiel pour l'édifice de ce projet. Ces différentes relations évoquées invitent à accorder une place importante aux différents contenus des disciplines tout en prenant en compte leurs spécificités et les contextes dans lesquels ils se déploient. Cette dimension non négligeable de l'interdisciplinarité invite à se questionner entre autres sur la formation disciplinaire et didactique des enseignants qui conduisent ce projet tant dans les lieux de formation des maitres que dans les écoles.

Description Groupe de travail 3 – Formation des enseignants et le projet de l'interdisciplinarité

Responsables :

Najoua HADJ ALI : (Université de Tunis – Tunisie)
Moussa Mohamed SAGAYAR (École. Normale Supérieure de Niamey - Niger)

Description. Un travail assez important est prévisible pour former les enseignants au projet de l'interdisciplinarité puisqu'une formation sur l'appropriation des techniques de collaboration, d'analyse et de maîtrise des programmes des différentes disciplines en interrelation avec les mathématiques s'impose. (Musique-Mathématiques, Langue-Mathématiques, Physique-Mathématiques, Informatique-Mathématiques, Intelligence artificielle-Mathématiques, Réalité augmentée-Mathématiques, Chimie-Mathématiques, Géographie-Mathématiques, etc.). Quelles situations mettre en place pour donner du sens à la même notion dans différents domaines où elle est évoquée ? Il s'agit de situations qui génèrent du sens dans différents contextes, différents sens, significations, statuts qu'on peut donner à une notion selon le contexte, le domaine d'étude.

Description Groupe de travail 4 – Dimensions historique, épistémologique, philosophique, idéologique et culturelles dans le projet de l'interdisciplinarité

Responsables :

Faten KHALLOUFI (Faculté des Sciences de Bizerte – Université de Carthage)
Hassane SQUALLI (Université de Sherbrooke – Québec)

Description. Plusieurs reche-rches en apprentissage et enseignement des disciplines ont mis en évidence la pertinence des approches historiques et philosophiques. D'autres recherches qui s'intéressent à la didactique des disciplines prennent en compte plusieurs dimensions et plusieurs théories. Dans le sens où la didactique des disciplines fait appel à l'analyse des contenus disciplinaires et mobilise des théories issues de la psychologie, de la pédagogie entre autres. Ces théories qui sont convoquées mettent en évidence les dimensions historiques, épistémologiques, philosophiques, idéologiques et culturelles. Ainsi les didactiques des disciplines elles-mêmes sont un espace d'interdisciplinarité. Dans le cadre du projet d'interdisciplinarité à l'école ainsi que dans le cadre de la formation des enseignants comment se manifestent ces dimensions et quelle est l'importance de les prendre en compte dans le projet de l'enseignant ?

Session poster

Une session Poster en lien avec les groupes de travail a été programmée sur une plage horaire au cours de laquelle a eu lieu les communications par affiche.

Ateliers

Quatre ateliers en fonction des champs de recherche en didactique des mathématiques ont organisés sous forme des travaux dirigés où les participants sont mis en activités sur diverses situations. Ils ont été programmés sur deux plages horaires pour un déroulement respectif de deux ateliers en parallèle. Cette organisation a permis aux participants de ADiMA 3 d'assister à deux ateliers.

La trigonométrie au temps « des anciens » : quelques leçons pour l'enseignement

Abdellah EL IDRISSI (Université Cadi Ayyad–École Normale Supérieure–Maroc)

Résumé. L'atelier consiste à faire étudier par les participants, des extraits de textes anciens ayant rapport à la trigonométrie. L'objectif est de dégager des « grandes idées » ayant jalonnées le développement historique de la trigonométrie et d'étudier la possibilité ou l'intérêt de les considérer pour l'enseignement. En fait, à travers ce cas précis nous espérons discuter des intérêts de l'histoire des mathématiques pour l'enseignement et pour la formation des enseignants. L'atelier se structure en trois parties principales encadrées par une introduction et d'une discussion.

La trigonométrie chez les Egyptiens et la notion de seket : l'ancêtre de la cotangente
La trigonométrie chez les grecs et la notion de corde : l'ancêtre du sinus.
Éléments de trigonométrie arabe : la trigonométrie entre le cercle et le triangle.

Utilisation du serveur WIMS pour une diversification des pratiques enseignantes

Fernand MALONGA (Université Marien Ngouabi – ENS – Brazzaville)

Résumé. Au cours de cet atelier, nous nous proposons de travailler sur un outil interactif d'apprentissage en ligne qui, en utilisant un navigateur Internet, permet d'accéder à une base d'exercices interactifs et de créer des classes virtuelles. Il s'agit de « Web Interactive Multipurpose Server (WIMS) »

La structure de WIMS est particulièrement intéressante pour les activités d'enseignement des mathématiques, dans lesquelles le serveur permet d'analyser individuellement le comportement des apprenants, et de proposer des activités adaptées à chacun d'eux selon le niveau de difficulté.

L'accès à Internet nécessaire à l'utilisation de WIMS n'est pas garanti dans nombre de structures scolaires surtout en Afrique. C'est en ce sens que nous ferons recours à l'utilisation des boitiers Gygabyte Brix GB-BXBT-2807 rendant l'usage de la plate-forme

WIMS possible. Chacun de ces boitiers joue le rôle de micro-serveur, dans lequel on y a installé WIMS et un dispositif de connexion à distance (wifi).
Les participants à cet atelier sont invités à se connecter aux boitiers Gygabyte, à créer des classes virtuelles et à s'engager au traitement des situations issues de la base d'exercices interactifs.

Mathématiques en plein air avec MathCityMap

Christian MERCAT (Université Claude Bernard–Lyon 1)

Résumé. Au cours de cet atelier, nous travaillerons autour des « mathématiques en plein air » Que faisons-nous du corps dans l'apprentissage des mathématiques. Assis sur une chaise, les mathématiques donnent-elles la mesure de leur puissance de modélisation du réel, hors la classe? Un dispositif d'apprentissage de mathématiques innovant soutenu par la technologie mobile, le projet MathCityMap, s'appuie d'une part sur un portail web qui permet aux enseignants de concevoir des tâches qui posent des questions dont les réponses demandent de prendre des informations dans son environnement, et d'autre part sur une application sur smartphone qui permet aux élèves de résoudre des tâches proposées dans un parcours géolocalisé. Les participants au TD sont formés à son utilisation et invités à porter un regard didactique sur des générateurs de tâches sur le portail afin d'en analyser la qualité.

Robustesse en géomatique : Regard didactique sur la compréhension théorique de l'analyse spatiale de l'évolution géomorphologique

Noamen REBAI (Université de Tunis el Manar–ENIT)

Résumé. La vraie puissance du système d'information géographique (SIG) réside dans l'analyse mathématique de l'information spatiale. Cette dernière nécessite le paramètre de la continuité spatiale ainsi qu'un état de régularité surfacique qui ne peut être assuré que par interpolation mathématique. Ce travail présente une approche méthodologique quantitative pour l'évaluation de six méthodes d'interpolation utilisées dans la production d'un modèle numérique du terrain (MNT) à partir des données topographiques vectorielles dans un SIG. Divers paramètres mathématiques et statistiques sont utilisés et analysés pour évaluer l'influence du relief sur ces méthodes d'interpolation.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

Une assemblée générale a lieu le 20 août 2022 pour faire le bilan de ces trois premières années d'existence de ADiMA en vue de dégager les perspectives de ADiMA. Un nouveau bureau devrait être mis en place pour la période 2022-2024, ainsi que le choix du pays qui accueillera la quatrième édition du colloque. Faute de participants en règle au regard des statut le nouveau bureau n'a pas été mis en place. Il a été demandé au précédent bureau d'assurer l'intérim et de conduire une consultation pour revoir les statuts. Toutefois le pays hôte pour l'édition 2024 a été désigné. Il n'y avait qu'une seule candidature c'est le Maroc qui accueillera ADiMA4
Néanmoins les discussions se sont poursuivies autour de la participation et de l'implication de ADiMA dans l'organisation et la tenue du 8e colloque de l'Espace Mathématique Francophone (EMF 2022) du 12 au 16 décembre 2022 à Cotonou au Bénin, mais aussi, l'implication de ADiMA dans les colloques régionaux en Afrique. Le président a informé les participant qu'il y aura le lancement d'une revue scientifique de l'ADiMA et la mise sur pied d'animation scientifique de l'ADiMA par le biais du projet Capacity And Network Project (CANP 1) de International Commission of Mathematical Instruction (ICMI). En effet le projet CANP initié par Moustapha Sokhna et Mamadou Sangaré a été intégré officiellement à ADIMA étant donné que ce projet poursuit les mêmes objectifs qu'ADiMA.

TÉMOIGNAGE POUR MAMADOU SOULEYMANE SANGARÉ

Mamadou Souleymane SANGARÉ a été le président du comité de pilotage en vue de la création de ADiMA en 2016 et du comité d'organisation du premier colloque ADiMA 2016 à Yaoundé au Cameroun. Il était aussi avec Moustapha Sokhna responsable du projet CANP1 soutenu par l'ICMI.

Sous la direction des professeurs Gaoussou Traoré (Université du Mali) et de Nicolas Balacheff (Université Joseph Fourier de Grenoble), Mamadou Souleymane SANGARÉ a rédigé et soutenu en 2000 une thèse de Doctorat en Didactique des Mathématiques en cotutelle ISFRA-Bamako/UJF-Grenoble1, ayant pour titre : « *La rotation : approche cognitive – approche didactique. Une étude de cas au Mali* ».

Impliqué en Afrique et sur la scène internationale, dans plusieurs associations, projets et activités de recherche et de formation en didactique des mathématiques, Mamadou Souleymane SANGARÉ a toujours été soucieux de la diffusion des travaux de recherche et de formation traitant des problématiques de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques ailleurs et en Afrique. Il a œuvré à ce titre pour la valorisation et l'intégration de la didactique des mathématiques en formation initiale et en formation continue en Afrique.

Mamadou Souleymane SANGARÉ a consacré beaucoup d'énergie à la formation de la relève scientifique en didactique des mathématiques en Afrique en dirigeant des thèses et des mémoires et en participant à plusieurs manifestations scientifiques traitant de thèmes en lien avec des problématiques de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques en Afrique. Mamadou Souleymane SANGARÉ laisse dans le deuil une communauté de didacticiens africains qui se souvient de sa sagesse, de son intelligence, de son implication et de son souci permanent de renforcer la formation, la recherche et la diffusion des savoirs en didactique des mathématiques dans les institutions de formation à l'enseignement.

Nous exprimons notre vive sympathie à toute sa famille et ses proches. ADiMA conserve un très bon souvenir de notre grand-frère Mamadou Souleymane SANGARÉ et salue son engagement pour la communauté de didacticiens des mathématiques africains.

Adolphe & Faïza

REMERCIEMENTS

L'Association de Didacticiens des Mathématiques Africains (ADiMA) a organisé sous l'égide de l'Association Tunisienne de Géomatique (ATG), l'Université de Tunis el Manar (UTM) et l'Université Virtuelle de Tunis (UVT) le troisième colloque scientifique qui s'est tenu du 15 au 20 août 2022 à l'hôtel Chich Khan, Hammamet – Tunisie.

Le bureau exécutif (BE) et le comité Local d'organisation (CLO) remercient l'Association Tunisienne de Géomatique (ATG), l'Université de Tunis el Manar (UTM)et l'Université Virtuelle de Tunis (UVT) et plus particulièrement les responsables de ces institutions pour leur implication et pour avoir accepté d'héberger cet évènement Hammamet en Tunisie. Le colloque a bénéficié du soutien de l'International Commission of Mathematical Instruction (ICMI). Les comités remercient sincèrement les membres du comité scientifique et les relecteurs pour la collaboration efficace apportée à la tenue de ce deuxième colloque de l'ADiMA. Leurs avis critiques et constructifs ainsi que leurs suggestions ont permis d'améliorer les textes proposés au double plan scientifique et rédactionnel. Ainsi, leur expertise, leur professionnalisme et leur générosité ont contribué au succès du colloque et ont permis de donner un caractère hautement scientifique aux communications. Leurs commentaires sur les textes relus ont été très appréciés par les auteurs. Ils leur ont permis de peaufiner leur présentation, et par ricochet, de mieux comprendre les défis et les enjeux de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques en Afrique, ainsi que de la formation des enseignants et les enjeux de l'interdisciplinarité en Afrique Par ailleurs, leur contribution a permis aux auteurs et aux participants d'apprécier à leur juste valeur la pertinence de la création de l'association et de la tenue du colloque. Les commentaires pris en compte par les auteurs ont permis d'avoir des actes dignes d'un colloque scientifique de didactique des mathématiques pour cette jeune association. La diffusion des actes facilitera, entre autres, la compréhension des problématiques de la formation des enseignants en Afrique et au-delà de ses frontières.

Les membres des comités remercient les collègues ayant répondu à l'appel de communication, mais qui n'ont pas pu assister à la troisième édition du colloque de l'ADiMA en Tunisie. Les membres des comités tiennent à remercier aussi les bénévoles pour leur implication. Nous ne serons terminés sans remercier tous les organisateurs locaux qui ont fait de ce colloque une réussite.

Le colloque a bénéficié de l'appui de plusieurs partenariats associatifs, publics et privés :

- Université de Tunis El Manar et Université Virtuelle de Tunis
- Associations (ATDM, ATSM, SMT, MIMS et ATM)
- Institutions universitaires (IPEI El Manar, ENIT, ISEFC, IFT et TBS)
- Laboratoires de recherche (ECOTIDI, LAMSIN-ENIT)

INTRODUCTION AUX ACTES DU COLLOQUE D'ADiMA 3

Les actes du colloque présentent les versions écrites des conférences et des communications orales et de communication par affiche réalisés au cours du colloque. Ces présentations ont été possibles à la suite d'un appel de propositions de communication et d'une relecture des propositions par des chercheurs de haut niveau en didactique des mathématiques, membres du comité scientifique. La diversité des textes reflète le thème du colloque :

Approche interdisciplinaire dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : quels projets et quels enjeux pour l'Afrique ?

Sous-thèmes :

A. Les rapports entre mathématiques et le concret, les mathématiques et les autres disciplines
B. Conditions permettant la réalisation du projet de l'interdisciplinarité.
C. Formation des enseignants et le projet de l'interdisciplinarité.
D. Dimensions historique, épistémologique, philosophique, idéologique et culturelles dans le projet de l'interdisciplinarité.

Les actes du colloque ADiMA3 comporte les textes de 4 conférences, de 18 communications orales et de 3 communications par affiche. Les textes sont présentés par ordre alphabétique au regard du nom du premier auteur.

CONFÉRENCES PLÉNIÈRES

Un lien entre les mathématiques et le concret

MathenJelaba

Rachid BEBBOUCHI
USTHB, Alger

RESUME

Pour apprécier les mathématiques, les lycéens ont besoin de les rattacher à des situations concrètes issues de leur vécu quotidien. Le concours MathenJelaba a pour but de leur proposer de telles situations et de les laisser choisir l'outil mathématique (qu'ils savent maitriser) pour modéliser ces situations et répondre aux questions inhérentes. Après six années d'expériences, nous pouvons en définir une politique dans le cadre d'une approche interdisciplinaire dans l'enseignement. Cette approche a un triple objectif :

- Intéresser les élèves aux problèmes de leur environnement propre (en particulier dans les pays africains),
- Leur faire aimer les mathématiques par une recherche de modélisation,
- Les rapprocher du milieu des chercheurs mathématiciens.

1. INTRODUCTION

J'ai été contacté en 2015 par des collègues, Soulu et Kasdali, enseignantes au Lycée International Alexandre Dumas (LIAD), pour prévoir deux sujets MathenJeans (acronyme de Méthode d'Apprentissage des Théories mathématiques en Jumelant des Établissements pour une Approche Nouvelle du Savoir) pour des lycéens du LIAD. C'est une première en Algérie. J'ai proposé que la Société Mathématique d'Algérie prenne en charge cette activité.

2. C'EST QUOI MATHENJEANS ?

Association loi 1901, agréée par l'Éducation Nationale, soutenue par le CNRS, lauréate 2015 de l'initiative présidentielle "La France s'engage", MATh.en.JEANS a pour but de développer "*des actions de jumelage entre un mathématicien et des établissements scolaires, afin de mettre les jeunes en situation de recherche, permettre aux élèves comme à leurs parents de se faire une autre image des mathématiques que celle d'une discipline scolaire sélective ou de champ scientifique strict et achevé".*

En 2018, 4850 élèves ont été inscrits dans 340 ateliers dont 45 à l'étranger, en Europe, en Amérique du Nord, en Afrique, et aussi au Moyen Orient et en Inde. Environ 600 enseignants et 190 chercheurs ont participé également à l'aventure.

Les élèves ont présenté leurs travaux de recherche lors de 12 congrès : 9 en France (Amiens, Gif-sur-Yvette, Grenoble, La Rochelle, Marseille, Pau, Rennes, Saint-Denis de La Réunion, Toulouse), et 3 à l'étranger (Iasi, Louvain-la-Neuve, San Francisco).

Données récoltées en décembre 2018 à partir des inscriptions en ligne. (voir [1])

3. POURQUOI MATHENJELABA ?

Très corporatiste, l'Association MathenJeans demande de signer une convention pour tous ceux qui ont l'intention d'organiser une action dans le genre MathenJeans. En Algérie, nous avons préféré nous démarquer de façon à organiser cette manifestation sous forme de compétition. Par conséquent, nous avons créé au sein de la SMA *(voir* [2]) une commission de travail appelée MathenJelaba (acronyme de **M**athématiques et **A**pprentissages

THématiques en **J**umelant des **E**tablissements (**L**ycées) **A**lgériens pour un **B**ackground **A**ttractif).

4. DIFFERENTES EXPERIENCES :

En 2016, un seul lycée est concerné avec deux groupes de recherche.

En 2017, deux lycées sont concernés avec deux groupes mixtes.

En 2018, trois lycées sont concernés avec 4 groupes mixtes.

En 2019, trois lycées sont concernés autour de six sujets.

En 2020, six lycées ont été concernés mais le concours n'a pas eu lieu à cause de la pandémie.

En 2021, deux lycées ont été concernés.

5. FONCTIONNEMENT

5.1. Les chercheurs

Ce sont tous des professeurs de l'USTHB (Université de Sciences et Technologie Houari Boumedien). Ils ont en charge :

- la conception des sujets,
- d'intervenir au début et à mi-parcours pour répondre aux questions des élèves relatives aux sujets,
- d'organiser la finale à l'université,
- de constituer le jury de sélection lors de la finale.

Une coordinatrice est chargée de piloter le projet, de coordonner les actions d'encadrement et d'être l'interlocutrice entre les différents acteurs. Elle est universitaire et enseigne au lycée.

5.2. Les encadreurs

Enseignants dans les lycées, doivent :

- Etablir le calendrier de la recherche
- Veiller au respect du calendrier
- Orienter les élèves
- Ne pas répondre à des questions (disciplinaires) touchant au sujet de recherche (ne pas prendre partie)
- Aider les élèves dans leurs recherches
- Etre un coach
- Etre le trait d'union avec l'universitaire
- Garantir le respect du canevas de recherche
- Garantir la validité des résultats proposés
- Etablir un rapport final

5.3. Le recrutement des élèves

Le projet concerne les élèves de seconde c'est-à-dire de 1AS. Des affiches sont mises à disposition des élèves afin qu'ils en prennent connaissance. Le recrutement s'établit sur la base du volontariat.

Le choix d'équipe mixte est délibéré puisque la compétition ne visait pas un concours entre les lycées, mais plutôt entre les équipes d'élèves. Par contre, une équipe est composée de binômes provenant de chaque lycée.

5.4. Le travail

- Les équipes et les encadreurs se retrouvent chaque mardi matin afin de travailler ensemble.
- Un espace virtuel a été créé pour chaque équipe afin que, d'une part, les encadreurs puissent suivre l'évolution des travaux et d'autre part, les élèves, d'horizons différents, puissent travailler ensemble en ligne. Ces espaces ont été créés sur Google Classroom.

6. LES SUJETS 2018-2019 (AVANT COVID):

- *La chasse à l'ours* : Siad est un chasseur d'animaux sauvages au profit du zoo de Jijel. Il est parti dans un pays où il pouvait attraper un ours. Il a réussi à en mettre un en cage. Il repart à la chasse et parcourt 1km plein sud, ensuite 1 km plein est et enfin 1 km plein nord. A sa grande stupeur, il se retrouve devant la cage de l'ours qu'il a attrapé. Quelle est la couleur de l'ours ?

  Si vous résolvez cette énigme, vous pouvez répondre à la question suivante : quelle ville peut être un coin de carré avec Alger ?
- *La chasse aux fausses pièces* : Ahmed et Zoulikha se font avoir à chaque fois par des commerçants qui leur filent de fausses pièces de 100 DZD. Ils se sont procurés une pièce étalon et une balance à plateaux pour trouver en un minimum de pesées une fausse pièce (plus ou moins lourde que les autres) parmi un tas de pièces. Aidez- les
- *Un problème pour SONATRACH* : Sonatrach (compagnie algérienne de pétrole) vient de découvrir de nouveaux gisements près de Béchar. Elle doit relier tous les puits à une raffinerie par un réseau de pipe-lines. Aidez- les à choisir le réseau le moins coûteux
- *Une croisière en Méditerranée Ouest* : Une croisière est prête à démarrer du port de Marseille à 16h. Elle doit relier d'abord Mahon sur 212 miles nautiques et y arriver à 8h30. Ensuite, elle repart de Mahon à 16h30 et relie Cagliari sur 250 miles nautiques. Elle doit y arriver à 10h. Elle repart de Cagliari à 18h et relie La Valette sur 326 miles. Elle doit y arriver à 14h30. Elle repart de La Valette à 20h et relie Messine sur 149 miles. Elle doit y arriver à 9h. Elle repart de Messine à 18h et relie Naples sur 179 miles. Elle doit y arriver à 6h30. Elle repart de Naples à 13h et relie Gênes sur 347 miles. Elle doit y arriver à 9h. Enfin elle part de Gênes à 18h et termine le voyage à Marseille sur 206 miles. L'arrivée est prévue à 8h.Aidez le commandant à tracer son itinéraire et à calculer à chaque étape sa vitesse de croisière.
- *Une coopérative* : Les familles Bouhadjra, Bougherqa, Boutine et Bouadjna sont de très bons amis. Ils ont acheté un grand terrain et ont construit chacun une villa sur les coins d'un carré de 1000 m de côté. Mais le terrain est argileux. Alors ils ont décidé de relier leurs villas par des chemins goudronnés. Aidez- les à déterminer le réseau le plus économique en bitume. Imaginez une généralisation.
- *Blanche Neige et les sept nains* : Blanche Neige a proposé un jeu aux sept nains. Chacun d'eux va porter un chapeau avec un numéro quelconque choisi entre 1 et 7. Chaque nain voit les numéros des 6 autres mais ne voit pas le sien. Grâce à une bonne entente entre eux, ils arrivent à montrer qu'un et un seul d'entre eux va deviner son numéro. Comment ? Imaginer une généralisation.

7. Le jour du concours

Il a eu lieu le Mardi 16 Avril 2019 après midi pour donner suffisamment de temps aux élèves mais aussi pour fêter « Youm el Ilm », Jour du Savoir 2019 et la Faculté de Mathématiques de l'USTHB nous a fait l'honneur d'héberger cet évènement.

7.1. Le team gagnant

Le groupe chasse à l'ours a séduit par son exposé très argumenté, coloré et vivant.

7.2. Les sujets non aboutis

Blanche Neige et les sept nains : et pourtant une variante de ce sujet a été proposée dans plusieurs villes en France en 2019 dans le cadre de MathenJeans, la chasse aux fausses pièces: et pourtant c'est un problème classique en mathématiques.

7.3. Les récompenses

Les élèves du team gagnant ont reçu des cadeaux conséquents mais tous les autres concurrents ont été récompensés par des cadeaux symboliques et tous les élèves ont eu une attestation de participation.

7.4. Une convivialité

La cérémonie s'est terminée par un coktail offert par les lycées. L'ambiance était très fraternelle.

8. L'annee 2021

Nous avons fait passer le concours aux candidats de 2021 le Mardi 25 Mai 2021 à l'auditorium de l'USTHB, suffisamment grand pour respecter la distanciation.

Quatre groupes d'élèves du LIAD et quatre groupes d'élèves du lycée El-Malak ont concouru.

8.1. Les sujets retenus de 2021

- Les lunettes de Zazou
- Allons sur Mars
- A la gare de l'Agha
- A Tidjelabine
- Ech chkara

Les lunettes de Zazou

Un vent terrible souffle sur Alger. Zazou l'élégant a fait tomber ses lunettes de soleil et la monture s'est cassée. Il demande à son opticien de lui fabriquer des lunettes un peuparticulières. Zazou décide de garder ses verres de lunette dont chacun a la forme d'un disque de diamètre 2 cm. Il demande à son opticien que chaque verre soit maintenu dans une armature en forme de triangle rectangle et dont les longueurs des trois côtés soient entières !

Pouvez-vous aider l'opticien de Zazou à concevoir ses montures en lui donnant les côtés du triangle ? Pourra-t-il lui proposer plusieurs modèles triangulaires ?

Allons sur Mars

La sonde *Espérance* vient de descendre sur Mars grâce en particulier à un chercheur algérien de la NASA, ancien professeur à l'USTHB.

Plusieurs rebonds ont été nécessaires à la sonde pour se poser. Sa position n'est alors pas connue avec certitude, si ce n'est, comme le montrent les photos prises après s'être posée, qu'elle se trouve dans une zone peu éclairée par le soleil ne lui permettant pas de recharger ses batteries. Le centre de contrôle a décidé alors de mettre *Espérance* en hibernation et de la réveiller lorsque l'éclairement de la sonde sera suffisant, cela afin de permettre un chargement suffisant des batteries. La localisation de la sonde est alors essentielle pour la poursuite de la mission ! Les clichés indiquent que la sonde est sur une crête devant une montagne séparée par un canyon.

Notons P, Q et R les sommets du triangle contenu dans le plan horizontal parallèle au sol : le point P représente la sonde, Q et R deux points au pied de la montagne de l'autre côté du canyon (Voir Figure). Suivant les photos prises à plusieurs intervalles de temps, l'ombre d'un relief situé en Q balaie l'angle PQR de l'intérieur du triangle pendant une durée de 1 h 14 mn 40 s. De même, l'ombre d'un relief situé en R balaie l'angle QRP pendant 1 h 40 s. Le segment QR mesure 100 mètres. Sur Mars, la durée du jour est de 24h37mn. Est-il possible de connaître la largeur du canyon à partir de l'endroit où se trouve Espérance ?

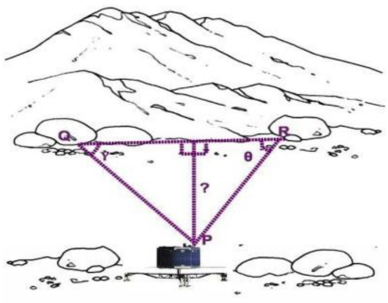


Figure. La sonde *Espérance*

A la gare de l'Agha

Ami Qitar dirige la gare de l'Agha, gare de triage. Avec la pandémie, aucun train de nuit ne circule. Il doit donc ranger les trains le soir avant de fermer la gare, en fonction de leur ordre d'arrivée et afin qu'ils puissent repartir dans le bon ordre le lendemain. Pour commencer, il étudie les voies de garage classiques, en cul de sac : on y entre par un côté, on en sort par le même côté, dans l'ordre inverse. Sachant que les trains sont numérotés et doivent partir le matin dans l'ordre (1, puis 2 puis 3 etc.) il étudie, pour différents nombres de voies de garage et différents nombres de trains, les ordres d'arrivée qui permettent de stocker les trains et de repartir dans le bon ordre. Après plusieurs mois de recherches, il passe à d'autres types de voies, à sens unique (on arrive d'un côté, on repart de l'autre) à double sens ... et des combinaisons de types de voies, afin d'envisager les solutions les plus efficaces pour construire la gare de triage du futur, économe et efficace. Aidez-le.

A Tidjelabine

Moh Zaouali va à Tidjelabine pour acheter une voiture d'occasion, pas chère mais peu roulée. C'est un idéal. Aidez-le à identifier le critère qui va guider son choix.

Ech chkara

En Algérie, on arrive à trouver des magasins assez achalandés en produits d'exportation. Ils sont généralement fournis par des « voyageurs de commerce ». Qechbekhta est spécialisé dans les vêtements. Mais comment va-t-il remplir sa valise pour ramener un maximum de vêtements ? Aidez-le.

8.2. Les résultats

Après délibération du jury, le groupe du lycée El-Malak qui a travaillé sur le sujet de la gare de l'Agha a été unanimement désigné comme le gagnant du concours MeJel2021 et chacun de ses membres a reçu un cadeau conséquent.

Les membres du jury et les encadreurs ont enfin été conviés à un repas à la Maison de la Science.

Satisfaction : Les élèves et leurs parents ont été ravis du déroulement de la journée, ainsi que certains collègues mathématiciens, notamment ceux du jury qui ont assisté pour la première fois.

8.3. Les récompenses

Les élèves du team gagnant reçoivent des cadeaux conséquents mais tous les autres concurrents ont été récompensés par des cadeaux symboliques et tous les élèves et leurs encadreurs ont eu une attestation de participation.

9. CONCOURS 2021-2022

4 groupes du lycée El-Malak et 2 goupes du lycée LIAD ont été concernés.

La finale du concours MathenJelaba s'est déroulée le Samedi 14 Mai 2021 à l'Institut Français d'Alger.

Vers 15h30, le jury composé de Bebbouchi, Aider, Bencherif, Sadki, Slimani, professeurs de Mathématiques à l'U.S.T.H.B. et des représentants des lycées Megherbi et Zedek s'est retiré pour délibérer. Un groupe a eu la faveur de trois personnes et les deux autres ont été convaincus de leurs arguments.

9.1. Le team gagnant

Le groupe gagnant, à savoir le groupe 7 du lycée Al-Malak sur la marche des fourmis a été élu à l'unanimité, suivant leurs réponses aux questions, la structure de l'exposé, l'originalité et le choix des notions utilisées, ainsi que leur comportement, leur prise de parole successive et surtout un support écrit bien élaboré.

9.2. Le sujet choisi : La marche des fourmis

Dans un jardin, les fourmis tracent leur chemin en se suivant l'une derrière l'autre. Mais attention, dès qu'une fourmi rencontre une autre, chacune change sa direction et elles continuent leur route. Malheureusement, dès qu'elles arrivent aux bords du chemin, Adnène et Lynda, enfants cruels, les aspergent d'eau et les écrasent. Sachant que le chemin parcouru est de trois mètres et la vitesse des fourmis est d'un mètre par minute, au bout de combien de temps Adnène et Lynda auront tué toutes les fourmis ?

9.3. Les récompenses

Chaque membre des groupes a reçu une attestation de participation dûment signée par la Directrice des Instituts Français d'Algérie et le Président de la SMA, un cadeau de participation gracieusement offert par BEYN, à savoir un power bank, et une médaille à l'effigie de la SMA et de la commission MathenJelaba.

Le team gagnant a reçu en sus l'inscription à une formation Robokids de trois jours (du 12 au 23 Juin 2022) gracieusement offerte par BEYN ainsi que le trophée MathenJelaba offert par la SMA qui sera conservé par le lycée Al-Malak.

Les membres du jury, les encadreurs, les membres de la commission MathenJelaba et les personnalités présentes ont enfin été conviés à un repas à l'Institut Français d'Alger offert par la SMA.

Les élèves et leurs parents ont été ravis du déroulement de la journée, ainsi que certains collègues mathématiciens. L'atmosphère était bon enfant.

10. CONCLUSION

Rien n'empêche de faire ce concours dans chaque région. Il suffit de trouver des lycées qui acceptent de faire concourir leurs élèves et des collègues qui acceptent qui acceptent de modeler des sujets style MathenJeans avec une coloration algérienne.

La SMA est prête à piloter toute initiative.

10.1. Perspectives

- Elargir l'activité à d'autres lycées algériens
- Aboutir à une activité nationale sous l'égide de la SMA
- Prévoir une activité maghrébine et éventuellement africaine.
- Prévoir des rencontres avec les groupes existant en France.

10.2. Avantages

- Il faudrait penser en amont à des critères de recrutement ou d'intéressement des élèves dans un tel dispositif. Il faudrait également être très attentif et vigilant dans la conception des sujets et avoir une connaissance précise des pré-requis des élèves.
- Il serait intéressant d'impliquer plus de monde parmi la communauté universitaire pour la conception et le suivi des sujets. Le réseau de la SMA pourra y contribuer. On peut même penser à créer une banque de sujets.
- Le secret espoir des intervenants est de susciter plus de vocations en mathématiques, une matière qui subit malheureusement une désertion critique, pas seulement en Algérie.

L'attestation de participation peut être un plus dans le CV de l'élève, soit pour le baccalauréat, soit pour son orientation à l'Université Elle compte déjà pour le grand oral au baccalauréat français.

11. LIEN AVEC L'INTERDISCIPLINARITE

A partir de cette expérience MathenJelaba, nous pouvons en définir une politique dans le cadre d'une approche interdisciplinaire dans l'enseignement. Cette approche a un triple objectif :

- Intéresser les élèves aux problèmes de leur environnement propre (en particulier dans les pays africains),
- Leur faire aimer les mathématiques par une recherche de modélisation,
- Les rapprocher du milieu des chercheurs mathématiciens.

12. BIBLIOGRAPHIE

[1] MathenJeans, www.mathenjeans.fr .

[2] SMA, http://www.smath.dz.

La résolution de problèmes comme objet d'enseignement ou comme outil pour l'enseignement des mathématiques

Aperçu de travaux à Genève à différents niveaux scolaires

Maud Chanudet
Jean-Luc Dorier
Stéphane Favier
Equipe DiMaGe – Université de Genève

Résumé

Ce texte présente succinctement un projet de recherche de l'équipe de didactique des mathématiques de Genève portant sur la résolution de problèmes comme objet d'enseignement ou comme un outil pour enseigner des contenus mathématiques à différents degrés scolaires du primaire au secondaire 2. Nous commençons par un rapide aperçu de l'ensemble du projet qui comprend trois thèses sur des aspects objets, deux travaux sur les aspects outils et la production, la diffusion et l'analyse de questionnaires destinés d'une part aux élèves et d'autre part aux enseignants. Nous donnerons des références bibliographiques présentant certains aspects du projet, avant de développer plus particulièrement deux thèses, pour finir sur la présentation d'un nouveau projet de recherche qui a découlé de ces deux thèses.

La première thèse, celle de Maud Chanudet, porte sur l'étude des pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un cours centré sur la résolution de problèmes en mathématiques et proposé au cycle d'orientation (secondaire 1) à Genève. L'observation des pratiques d'enseignants amenés à enseigner et à évaluer les compétences des élèves en résolution de problèmes vise à identifier leurs logiques d'actions évaluatives en tenant compte à la fois des fonctions certificative et formative de l'évaluation. Les analyses permettent de se faire une idée plus précise des attentes des enseignants vis-à-vis de la résolution de problèmes mais révèlent aussi certaines contradictions.

La deuxième thèse, celle de Stéphane Favier, vise à documenter le travail des élèves de différents niveaux scolaires (école obligatoire à Genève en milieu et fin de primaire et milieu du secondaire 1) dans des situations de résolution de problèmes, par des analyses fines du travail des élèves et des interactions entre-eux et avec l'enseignant. Ce travail permet plus particulièrement de caractériser les démarches des élèves, lorsqu'ils résolvent des problèmes mathématiques qui peuvent conduire à faire des essais et des ajustements dans les conditions habituelles de la classe.

Ces deux thèses ont conduit à des questions et appelé à poursuivre les recherches quant à la manière de dévoluer la résolution de problèmes et à ce qui peut être institutionnalisé à l'issue de telles séances, en particulier lorsque la résolution de problèmes est envisagée comme un objet d'enseignement et d'apprentissage à part entière. Mais ces travaux ont aussi fait émerger des pistes quant aux moyens de soutenir l'activité des élèves en résolution de problèmes. C'est ce qui nous a conduit à élaborer un nouveau projet de recherche, avec un volet au niveau primaire, l'autre au secondaire, visant tous deux la mise en place d'un travail collaboratif avec des enseignants en vue d'étudier deux processus complémentaires, la dévolution et l'institutionnalisation, avec une perspective d'élaboration d'une ressource pour la formation, et ce à l'appui des résultats de nos précédentes recherches.

1. INTRODUCTION

Ce texte vise à présenter une partie d'un travail de l'équipe DiMaGe de didactique des mathématiques de la section des sciences de l'éducation de l'Université de Genève. Le projet global intitulé : « La résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au cœur des apprentissages dans la classe de mathématiques », ResoPro en abrégé, a été piloté par Sylvie Coppé et Jean-Luc Dorier et financé par le Fonds National Suisse pour la recherche (FNS - Subside n° 100019_173105/1 - Période du 31.08.2017 au 31.01.2022).

De par plusieurs de nos travaux passés, nous avions déjà abordé plusieurs aspects liés à la résolution de problèmes dans divers contextes internationaux ou plus régionaux et à divers degrés scolaires. C'est sur la base de ces expériences passées que nous voulions, à travers ce projet, renouveler nos interrogations :

> Ces différents projets sur la démarche d'investigation s'attachent, en présentant des activités innovantes, à donner des outils aux enseignants, mais peu d'entre eux questionnent les réels apprentissages des élèves, même si cette question est toujours sous-jacente. En effet, souvent, l'intérêt de la résolution de problèmes est un présupposé qui n'est peu ou pas questionné. En outre, questionner les effets des pratiques et des types de problèmes sur les apprentissages effectifs des élèves reste théoriquement et méthodologiquement complexe. Comme les évaluations mises en place dans les classes pour évaluer les apprentissages dépendent fortement du type d'enseignement donné, sur quels éléments se baser pour évaluer les apprentissages ? A quelle échelle de temps ? Quels sont les effets liés à l'enseignant, notamment ses compétences à engager et à maintenir les élèves dans les tâches, à soutenir la motivation ?
>
> C'est pourquoi dans notre projet, nous nous sommes donnés comme objectif d'interroger et d'évaluer les effets sur les apprentissages des élèves de la pratique de la résolution de problèmes en classe de mathématiques selon divers cadres théoriques relevant de la didactique des mathématiques ou de l'évaluation. Nous nous appuyons sur différents travaux de l'équipe où la résolution de problèmes est utilisée soit comme un moyen d'enseigner des savoirs thématiques, soit comme un objet d'enseignement (pour apprendre à résoudre des problèmes). Nous cherchons ainsi d'une part à évaluer comment les apprentissages de thèmes mathématiques classiques peuvent se réaliser principalement par la résolution de problèmes et d'autre part, à mieux déterminer ce que l'on peut apprendre quand on se centre sur la résolution de problèmes indépendamment des contenus mathématiques, puis comment les élèves peuvent repérer ces savoirs et savoirs faire construits (comment peuvent être gérées les institutionnalisations) et quelles aides peuvent leur être fournies (Coppé & Dorier, à paraître, p. Introduction).

L'objectif essentiel du projet est de montrer comment se pense et se construit l'enseignement de la résolution de problèmes dans ses deux aspects, comment elle est mise en œuvre par les enseignants et quels apprentissages sont réalisés par les élèves, à travers différents travaux. Une part importante du travail s'articule autour de trois thèses, co-dirigées par Sylvie Coppé et Jean-Luc Dorier, permettant de questionner la résolution de problèmes sous des angles variés (niveaux scolaires, point de vue des enseignants ou des élèves).

La thèse de Maud Chanudet soutenue le 22 octobre 2019, intitulée « Étude des pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques », porte sur un cours proposé au cycle d'orientation (secondaire 1) à Genève centré sur la résolution de problèmes en mathématiques (Chanudet, 2019). L'observation des pratiques d'enseignants amenés à enseigner et à évaluer les compétences des élèves en résolution de problèmes vise à identifier leurs logiques d'actions évaluatives en tenant compte à la fois des fonctions certificative et formative de l'évaluation. Les analyses permettent de se faire une idée plus précise des attentes des enseignants vis-à-vis de la résolution de problèmes mais révèle aussi certaines contradictions. Les cadres théorique et méthodologique qui croisent des outils de didactique des mathématiques et du champ de l'évaluation offrent un outil général propre à permettre d'autres études.

La thèse de Stéphane Favier a été soutenue le 8 février 2022, sous le titre « Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève » (Favier, 2022). Ce travail vise à documenter le travail des élèves de différents niveaux scolaires (école obligatoire à Genève en milieu et fin de primaire et milieu du secondaire 1) dans des situations de résolution de problèmes, par des analyses fines du travail des élèves et de leurs interactions entre eux et avec l'enseignant. Ce travail permet plus particulièrement de caractériser les démarches des élèves, lorsqu'ils résolvent des problèmes mathématiques qui peuvent conduire à faire des essais et des ajustements dans les conditions habituelles de la classe, ce qui induit une complexité que peu de recherches sur le même sujet ont abordé et cela constitue donc une de ses originalités.

L'essentiel du texte présent consiste à présenter ces deux thèses et le nouveau projet de recherche, qu'elles ont permis de faire émerger.

Enfin, la thèse de Jana Lackova, dont la soutenance est prévue en janvier 2023, interroge la place de la démarche d'investigation dans le baccalauréat international et le rôle du dispositif d'évaluation spécifique nommé « Exploration en mathématiques ». Une première analyse de la place institutionnelle de ce dispositif a été faite en utilisant les outils de la Théorie anthropologique du didactique de Chevallard et a donné lieu à des communications et publications (Lackova, 2018, 2020, 2021; Lackova & Dorier, 2018). Une deuxième étude d'ordre clinique vise à documenter les rôles respectifs des enseignants et des élèves dans le dispositif, à travers l'observation de deux enseignants de l'école internationale de Genève et de deux de leurs élèves pendant toute la durée de la préparation du travail. Les analyses de ce matériau riche sont en cours, elles devraient permettre de documenter les ressorts en jeu dans un travail individuel de type démarche d'investigation (Dorier & Maass, 2020).

Deux autres études s'intéressent à la résolution de problèmes comme un outil pour enseigner des notions mathématiques.

La première étude, initiée par Sylvia Coutat et Céline Vendeira, porte sur l'enseignement de la géométrie au primaire. Ces deux chercheuses et formatrices d'enseignants ont développé depuis quelques années des ingénieries didactiques et une ressource pour les enseignants du primaire composées de situations-problèmes qui s'appuient sur un matériau original qu'elles ont créé et constitué de formes géométriques non conventionnelles découpées dans du bois avec des systèmes de pochoirs (le groupe s'est nommé « Proform » pour cette raison) (Coutat & Vendeira, 2015, 2018, 2019; Vendeira & Coutat, 2017).

La deuxième étude, nommée « Profon » (pour projet fonctions), menée par Pierre-François Burgermeister, Michel Coray, Marina De Simone et Laurence Merminod porte sur l'élaboration d'une ingénierie didactique sur l'enseignement des fonctions en 1^{e} année du Collège à Genève (secondaire 2, élèves de 16 ans). Après quelques pré-expérimentations, cette équipe a élaboré une ingénierie didactique sous forme d'une séquence d'enseignement sur les fonctions en mettant l'accent sur les jeux entre registres de représentation sémiotiques au sens de Duval (1993).

Enfin, de façon transversale, avec l'appui de Jean-Luc Dorier et Sylvie Coppé, Marina De Simone et Nataly Essonnier ont travaillé à l'élaboration, la diffusion et l'analyse de questionnaires destinés d'une part aux élèves et d'autre part aux enseignants de tous les niveaux scolaires. L'objectif est d'obtenir des informations déclaratives sur la perception de la résolution de problèmes mathématiques par les élèves et par les enseignants, du primaire au secondaire 2.

L'étude sur les élèves visait à documenter le rôle qu'ils attribuent aux mathématiques et, en particulier, à la résolution de problèmes dans leurs apprentissages.

Pour les enseignants, nous cherchions à déterminer la place et la fonction de la résolution de problèmes dans leur pratique déclarée. Dans ce but, nous avons réalisé un questionnaire discuté collectivement au sein de l'équipe DiMaGe et reprenant des items mis en avant dans la littérature sur des difficultés des élèves ou sur des croyances, des connaissances des enseignants en résolution de problèmes. Il est composé de plusieurs parties sur lesquelles nous demandons aux enseignants de se positionner selon une échelle de Likert en fréquence ou en accord, ou de proposer deux mots clés.

Une analyse des questionnaires destinés aux élèves et les travaux de Profon et Proform ont fait l'objet d'une communication au Séminaire national de didactique des mathématiques de Paris, piloté par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM) en 2020 (Burgermeister et al., 2021). Par ailleurs, une communication portant sur les questionnaires aux élèves et aux enseignants a été faite au colloque suisse sur les didactiques des disciplines à Locarno en avril 2022 (Coppé et al., 2022). Enfin un livre portant sur l'ensemble du projet est en cours de publication aux Éditions Université Grenoble Alpes (Coppé & Dorier, à paraître).

Dans la suite de ce texte nous allons présenter les deux thèses de Maud Chanudet et de Stéphane Favier.

Ces deux thèses ont conduit à des questions et appelé à poursuivre les recherches quant à la manière de dévoluer la résolution de problèmes et à ce qui peut être institutionnalisé à l'issue de telles séances, en particulier lorsque la résolution de problèmes est envisagée comme un objet d'enseignement et d'apprentissage à part entière. Mais ces travaux ont aussi fait émerger des pistes quant aux moyens de soutenir l'activité des élèves en résolution de problèmes. C'est ce qui nous a conduit à élaborer un nouveau projet de recherche, avec un volet au niveau primaire, l'autre au secondaire, visant tous deux la mise en place d'un travail collaboratif avec des enseignants en vue d'étudier deux processus complémentaires, la dévolution et l'institutionnalisation, avec une perspective d'élaboration d'une ressource pour la formation, et ce à l'appui des résultats de nos précédentes recherches. Nous présenterons succinctement les raisons qui nous ont conduit à ce nouveau projet et ce que nous sommes en train de mettre en place pour le réaliser.

2. ÉTUDE DES PRATIQUES ÉVALUATIVES EN RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

2.1 Introduction

Dans le canton de Genève, en Suisse romande, les élèves de 10^{e} année (13-14 ans, grade 8) qui suivent la filière scientifique ont, dans leur emploi du temps, une période de 45 minutes par semaine dédiée à la résolution de problèmes mathématiques. Les enseignants doivent par ailleurs, dans le cadre de ce cours intitulé « Démarches mathématiques et scientifiques » (DMS), évaluer de manière certificative les compétences de leurs élèves en résolution de problèmes. Or les instructions qui cadrent ce cours sont floues et laissent une grande liberté aux enseignants quant à la façon dont ils souhaitent organiser et gérer leur enseignement et l'évaluation associée. C'est dans ce contexte que nous (Chanudet, 2019) avons étudié les pratiques ordinaires d'enseignants amenés à enseigner la résolution de problèmes en mathématiques, en nous intéressant en particulier à leurs pratiques évaluatives. Notre travail porte sur une analyse des mathématiques que les enseignants font fréquenter à leurs élèves et de la manière dont ils organisent et gèrent de telles séances dédiées à la résolution de problèmes, avec une centration sur la dimension évaluative de leurs pratiques.

2.2 Les approches théoriques retenues concernant la résolution de problèmes et l'évaluation des apprentissages

2.2.1 La résolution de problèmes comme objet d'enseignement et d'apprentissage

Différents dispositifs, tels que les problèmes ouverts (Arsac & Mante, 2007) ou les narrations de recherche (Bonafé *et al.*, 2002), ont vu le jour ces dernières décennies avec l'objectif partagé d'initier les élèves à la démarche scientifique et de transposer à la classe la pratique de la recherche en mathématiques. Georget (2009) propose quant à lui de réunir sous l'expression *d'Activités de recherche et de preuve entre pairs* (ARPP) ce type d'activités « dont l'objectif principal est d'entraîner les élèves à la démarche de recherche en mathématiques et aux échanges entre pairs à la manière des mathématiciens professionnels » (p. 77). Il met en avant cinq dimensions permettant de prendre en compte et de caractériser les spécificités de ces activités : le potentiel de recherche ; le potentiel de résistance ; le potentiel de résistance dynamique ; le potentiel de débat et le potentiel didactique. Dans notre thèse, nous avons utilisé ces potentiels afin de caractériser les problèmes destinés à faire chercher les élèves, ce qui nous a permis d'enrichir les outils classiques d'analyse a priori de la didactique des mathématiques. En effet, déterminer a priori, les potentiels des problèmes proposés aux élèves permet notamment de mieux comprendre ensuite l'effet des choix faits par l'enseignant, de ses interventions et de ses interactions avec les élèves lors du déroulement des séances en classe.

S'intéresser à l'enseignement et à l'évaluation de la résolution de problèmes amène aussi à questionner les apprentissages possibles des élèves liés à cet objet de savoir. À la suite de Houdement (2009) qui s'intéresse aux « problèmes pour chercher » à l'école primaire, l'hypothèse sur laquelle s'appuie cette recherche est que les activités de recherche et de preuve entre pairs peuvent, entre autres, amener les élèves à développer des apprentissages liés à des manières de raisonner et prouver en mathématiques. La nécessité de caractériser plus finement ces apprentissages nous a conduit à nous intéresser aux travaux menés par Jeannotte (2015) sur le raisonnement mathématique. Celle-ci met en avant la complémentarité de deux points de vue : l'aspect structurel et l'aspect processuel. Le premier aspect permet de tenir compte de la structure du raisonnement mathématique et de « décrire les éléments constitutifs d'un pas ou d'un enchainement de pas et les relations qu'ils entretiennent entre eux » (Jeannotte, 2015, p. 124). Le second permet d'intégrer la dimension temporelle du raisonnement et le but visé par celui qui le mène, et ce, en lien avec les fonctions du raisonnement mathématique. La prise en compte de ces deux points de vue permet de caractériser différents types de raisonnements (selon l'aspect structurel du raisonnement mathématique, comme le raisonnement hypothético-déductif, le raisonnement par étude exhaustive des cas, etc.), de démarches (selon l'aspect processuel, comme la démarche de type expérimentale ou la démarche d'ajustements d'essais successifs) mais aussi de preuves (par ostension, par contre-exemple, etc.) qui sont impliqués lors de la résolution de problèmes mathématiques. La variété des manières de chercher, raisonner et prouver en mathématiques ainsi mise en avant conduit à interroger la manière dont les enseignants s'y prennent pour organiser et mettre en œuvre un tel enseignement.

2.2.2 L'évaluation des apprentissages des élèves

L'étude de la dimension évaluative des pratiques des enseignants s'appuie ici sur une caractérisation de l'activité évaluative en quatre invariants (Allal, 2008) :

- La définition de l'objet de l'évaluation, à l'appui notamment des programmes scolaires ;
- Le recueil des informations en lien avec ce que l'enseignant cherche à évaluer, de manière formelle ou informelle, instrumenté ou non, à l'écrit ou à l'oral ;
- L'interprétation de ces informations, à l'appui le plus souvent de critères d'évaluation ;
- La prise de décision et la communication, en lien avec la fonction assignée à l'évaluation.

La recherche se focalise sur deux fonctions de l'évaluation : *certificative* c'est-à-dire qui tend à certifier qu'à la fin de l'enseignement associé l'élève a acquis ou non les apprentissages visés, et *formative* soit une évaluation qui est au service des apprentissages des élèves et qui vise à faire progresser les apprentissages en cours (Allal, 2008).

La conception élargie de l'évaluation formative met en avant la possibilité de recueillir de manière informelle des informations quant à l'activité des élèves, par exemple lors de discussions avec eux (Allal & Mottier Lopez, 2005). Les pratiques d'évaluation formative informelle visent ainsi à fournir des informations, générées au cours des activités quotidiennes, sur les apprentissages des élèves (Ruiz-Primo & Furtak, 2007). Le terme d'*épisodes interactifs*, repris de Kiwan Zacka (2018), caractérise les moments d'interactions verbales entre élèves et enseignant en classe, au cours desquels l'enseignant saisit des informations sur l'activité, les conceptions et les difficultés des élèves. Ils constituent un objet des analyses menées dans notre thèse.

En outre, la régulation est un concept clé de l'évaluation formative. L'expression de *pratiques d'évaluation à visée formative,* utilisée dans cette recherche, désigne ainsi l'ensemble des pratiques enseignantes visant à soutenir et favoriser la régulation des apprentissages chez les élèves. Les travaux de Allal (2007) mettent en avant différents éléments contextuels qui peuvent être associés à ces régulations : la structure de la situation d'apprentissage, impliquant notamment les tâches proposées, leur articulation ou encore les modalités de travail ; les interventions de l'enseignant et ses interactions avec les élèves ; et les interactions entre élèves. Les deux premiers niveaux sont interrogés particulièrement dans la thèse.

2.3 Le cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique

Le cadre théorique général de notre thèse repose quant à lui sur l'étude des pratiques via le cadre de la double approche didactique et ergonomique développé par Robert et Rogalski (Robert, 2004 ; Robert & Rogalski, 2002). Ce cadre invite à prendre en compte aussi bien le générique, en regardant les contraintes qui pèsent sur l'enseignant exerçant son métier, que l'individuel, en considérant les marges de manœuvre qui lui restent et la façon dont il les investit. Cinq composantes sont mises en avant par les auteures pour étudier les pratiques des enseignants. Les deux premières, cognitive et médiative, sont liées aux observations de séances de classe, aux activités possibles des élèves. La composante cognitive concerne les contenus mathématiques soumis aux élèves (les tâches, leur articulation, etc.) et permet de renseigner ce que les auteures nomment l'itinéraire cognitif proposé aux élèves. La composante médiative cible le déroulement des séances en classe (les formes de travail, les aides apportées par l'enseignant, les échanges et interactions avec les élèves). La combinaison de ces deux composantes permet de décrire les mathématiques que l'enseignant fait fréquenter à ses élèves et permet de dégager des logiques d'action. Pour intégrer le fait que les pratiques des enseignants sont l'expression d'un travail, trois autres composantes sont à prendre en compte : sociale, institutionnelle et personnelle. La composante sociale permet d'intégrer la dimension sociale du travail de l'enseignant (élèves, parents, collègues). La composante institutionnelle concerne les contraintes communes (programmes, horaires, manuels). La composante personnelle intègre tout ce qui est propre à l'enseignant en tant qu'individu (ses représentations sur le métier, sur les mathématiques, ses connaissances, ses expériences, etc.).

2.4 Question de recherche et repères méthodologiques

Les différentes références théoriques susmentionnées permettent de formuler la macro-question de recherche à laquelle la thèse cherche à répondre : quelles logiques d'action évaluatives se dégagent des pratiques des enseignants dans le cadre d'un enseignement de la résolution de problèmes en mathématiques ?

Les analyses menées pour y répondre se situent à la fois à l'échelle d'une année scolaire, avec l'étude des projets d'enseignement, l'étude des problèmes proposés en évaluation, de leur articulation avec les autres problèmes ainsi que des grilles de critères d'évaluation utilisées par les enseignants ; mais aussi à l'échelle d'une séquence puis, encore plus finement d'une séance, ciblant la mise en œuvre effective des problèmes dans la classe, en lien avec l'évaluation formative informelle et l'étude des épisodes interactifs.

Nous reprenons ci-après quelques résultats et apports de notre thèse, ouvrant de nouvelles perspectives de recherches et de travail avec des enseignants.

2.5 Quelques résultats et perspectives

Cette recherche a notamment permis d'interroger la manière dont les enseignants peuvent favoriser des régulations de l'activité des élèves (Allal, 2007) en particulier à travers leurs interactions verbales informelles avec les élèves (Ruiz-Primo & Furtak, 2004, 2007) en cours de séances de résolution de problèmes. Une typologie de la manière dont se déroulent ces interactions et de l'objet sur lesquelles elles peuvent porter, à travers le double point de vue des informations recueillies et des retours faits par l'enseignant, a ainsi été élaborée. Il ressort que, si tous les enseignants organisent des discussions qui leur permettent de recueillir des indices quant à l'activité des élèves, à leurs difficultés, cela se joue dans des proportions très différentes selon les enseignants. Par ailleurs, ces épisodes interactifs ne semblent pas tous soutenir positivement l'activité et *a fortiori* les apprentissages des élèves. En particulier, les interactions des enseignants auprès des élèves amènent ces derniers à être plus ou moins actifs dans la manière de tenir compte des retours faits par l'enseignant sur leur travail, leurs résultats, les stratégies mobilisées, leurs erreurs, etc. Ceci rejoint les travaux de Black et Wiliam (2009) qui interrogent le lien entre feedback et implication des élèves dans les discussions en classe. De plus, le fait que l'enseignant cherche à impliquer les élèves dans les retours qu'il leur fait ne semble là encore pas toujours suffire pour favoriser des régulations chez les élèves. En effet, il semble aussi important qu'il s'appuie sur l'activité réelle des élèves et qu'il s'assure de leur possible implication dans la manière de prendre en compte ce retour, au vu notamment de leurs connaissances. Cette question de la proximité entre les connaissances disponibles des élèves et la pertinence des retours faits par l'enseignant est aussi interrogée par Robert et Vandebrouck (2014). Il ressort donc que les régulations de l'activité des élèves en cours de séance ne vont pas de soi. Ceci nous conduit à penser qu'il y aurait intérêt à faire en formation (initiale ou continue) un travail spécifique avec des enseignants pour leur permettre de développer de tels gestes professionnels.

Par ailleurs, cette recherche a permis d'identifier des difficultés lorsque, d'une part, les enseignants ont une large marge de manœuvre quant à l'organisation de leur enseignement de la résolution de problèmes et que, d'autre part, les instructions officielles en termes d'objectifs d'apprentissage restent floues. Ces difficultés portent sur la détermination d'objectifs d'apprentissage associés à la résolution de problèmes, sur la détermination de critères pour sélectionner les problèmes et organiser leur articulation, et enfin sur l'évaluation. Ces résultats font écho à la recherche menée par Choquet-Pineau (2014) sur les pratiques d'enseignants du primaire en France proposant des problèmes ouverts à leurs élèves qui l'amène à identifier deux profils d'enseignants, associés à des objectifs d'apprentissage différents : le premier ayant principalement pour but de faire chercher les élèves et de les amener à trouver la solution; le deuxième profil visant à faire apprendre des mathématiques aux élèves par la recherche. Cela interroge la nature des apprentissages qui peuvent être visés par la pratique de la résolution de problèmes et relance la question posée par Hersant (2010) de l'existence de savoirs associés.

A un autre niveau, un deuxième volet de cette recherche doctorale sur une étude à large échelle des pratiques déclarées des enseignants fait apparaitre que ceux-ci quand ils choisissent les problèmes s'appuient sur des critères bien souvent non mathématiques et sont même parfois en opposition avec les prescriptions officielles. En complément, l'étude fine des pratiques effectives de trois enseignants dans le contexte du cours de DMS centré exclusivement sur l'enseignement de la résolution de problèmes montre que, si une des enseignants observés veille à articuler les problèmes qu'elle propose aux élèves en s'appuyant sur les stratégies en jeu lors de leur résolution, les deux autres ne cherchent pas à articuler les problèmes sélectionnés. Le choix des problèmes et l'articulation de ces problèmes sur le long terme, en vue d'un apprentissage de la résolution de problèmes, sont donc des questions vives pour la profession.

Cette recherche a enfin permis de mettre en évidence les difficultés rencontrées par les enseignants à institutionnaliser des savoirs associés à la résolution de problèmes. En effet, dans les trois classes suivies, il n'a pas été observé de traces d'institutionnalisation, relativement à des textes du savoir écrit ou oral. Il semble toutefois que ce constat dépasse le seul cadre de cette recherche et montre l'importance de travailler l'articulation entre ce qui est institutionnalisé et ce qui est évalué lorsque la résolution de problèmes est enseignée pour elle-même.

L'identification des différents types de raisonnements, démarches et preuves en jeu lors de la résolution de problèmes constitue selon nous une piste intéressante pour organiser le choix des problèmes à proposer aux élèves, leur articulation, mais aussi prendre en compte la question des apprentissages sur un temps long, ou encore l'articulation entre institutionnalisation et évaluation.

3. ÉTUDE DES PROCESSUS DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES PAR ESSAIS ET AJUSTEMENTS

3.1 Ancrages théoriques et questions de recherche

Cette recherche doctorale (Favier, 2022) s'est attachée à étudier et à caractériser les démarches de résolution de problèmes de mathématiques mises en œuvre par des élèves du primaire et du secondaire 1. Dans la littérature scientifique, on trouve différentes caractérisations des processus liés à la résolution de problèmes. Les travaux fondateurs sont ceux de Pólya (1989) qui propose un modèle linéaire qui tient en quatre étapes successives :

- Comprendre le problème ;

- Concevoir un plan ;
- Mettre le plan à exécution ;
- Examiner la solution obtenue.

La linéarité de ce modèle a été remise en question notamment par le modèle de Schoenfeld (1985) (voir **Figure 1**). Ce dernier a ainsi ajouté une phase d'exploration permettant de rendre compte de la partie de la recherche qui s'éloigne de l'appropriation du problème mais qui ne constitue pas encore un plan. Cette phase d'exploration permet donc en particulier, selon lui, de rendre compte de la partie non structurée de la recherche. Ce modèle présente ainsi une caractéristique cyclique dans l'enchainement : Appropriation – Planification – Exploration ou Planification – Exploration – Planification.

Récemment, Rott (2012) a mis à l'épreuve ces modèles avec l'analyse du travail d'élèves de 10 – 12 ans volontaires venus résoudre des problèmes dans son laboratoire de recherche. Ses résultats montrent que les modèles de Pólya et de Schoenfeld ne sont pas suffisants pour rendre compte de la complexité des phénomènes, c'est pourquoi il propose d'enrichir ces modèles en mettant en évidence la plus grande complexité des liens entre les différentes phases comme le montre la **Figure 2**.

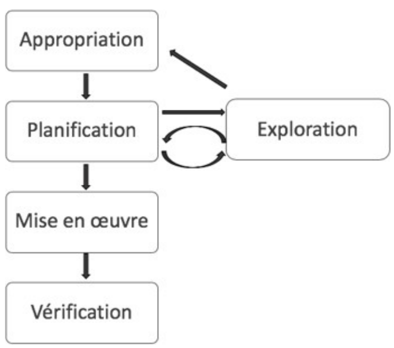


Figure 1*. Présentation simplifiée et traduite du modèle de Schoenfeld (1985)*

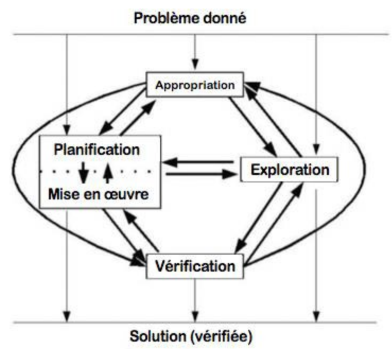


Figure 2*. Présentation traduite du modèle de Rott (2012)*

Par ailleurs, la littérature scientifique met en avant un deuxième aspect important relatif aux processus en jeu en résolution de problèmes qui concerne le rôle des heuristiques. Ce concept est exploré tant dans le champ de la psychologie (Houdé, 2019; Kahneman, 2012; Richard, 1994, 2004; Verschaffel, 1999), de l'intelligence artificielle (Feigenbaum & Feldman, 1963; Romanycia & Pelletier, 1985; Tonge, 1960) que de la didactique des mathématiques (Brousseau, 2012; Koichu et al., 2006; Pólya, 1957; Posamentier & Krulik, 2009; Rott, 2014; Schoenfeld, 1985). Nous en retenons la définition de Rott (2014) élaborée à l'appui d'une large revue de littérature qui embrasse ces différents champs et que voici :

> Heuristics is a collective term for devices, methods, or (cognitive) tools, often based on experience. They are used under the assumption of being helpful when solving a problem (but do not guarantee a solution). There are general (e.g., "working back-wards") as well as domain-specific (e.g., "reduce fractions first") heuristics. Heuristics being helpful regards all stages of working on a problem, the analysis of its initial state, its transformation as well as its evaluation. Heuristics foster problem solving by reducing effort (e.g., by narrowing the search space), by generating new ideas (e.g., by changing the problem's way of representation or by widening the search space), or by structuring (e.g., by ordering the search space or by providing strategies

> for working on or evaluating a problem). Though their nature is cognitive, the application and evaluation of heuristics is operated by metacognition. (p. 190)

Ainsi, au vu de l'ancrage théorique que nous venons de présenter, nous pouvons décliner notre première question de recherche : « Comment caractériser les processus de résolution mis en œuvre par des élèves dans les conditions habituelles de la classe ? », selon les deux sous-questions suivantes : « Dans quelle mesure les différents modèles nous permettent-ils de décrire le travail d'élèves qui résolvent des problèmes de mathématiques dans le contexte ordinaire de la classe ? » et « Quel rôle jouent les heuristiques dans la dynamique du processus de résolution de problèmes ? ».

Dans la suite, nous évoquons les aspects méthodologiques avant de présenter brièvement quelques résultats de notre travail.

3.2 Méthodologie

Notre recherche porte sur trois degrés différents 4P (élèves de 7-8 ans, grade 2), 8P (élèves de 11-12 ans, grade 6) et 10^{e} (élèves de 13-14 ans, grade 8) de l'école obligatoire dans le canton de Genève. Pour chaque degré, nous avons proposé un problème qui peut se résoudre en faisant des essais et des ajustements. Par exemple[1] pour les élèves de 4P, nous avons proposé le problème du *Jeu de cartes* : « Chaque carte de mon jeu représente soit un triangle, soit un carré. Je tire au hasard 15 cartes. Je compte tous les côtés des figures dessinées sur les cartes que j'ai tirées et je trouve 49. A ton avis, combien ai-je tiré de triangles et de carrés ? ».

Dans notre recherche, nous avons privilégié de faire travailler les élèves en groupes, après quelques minutes de recherche individuelle, de manière à pouvoir analyser les verbalisations. Cependant, une difficulté majeure consiste à recueillir des données au plus près du travail de l'élève. C'est pourquoi, nous avons équipé un élève par groupe d'une caméra embarquée fixée sur la tête. Cette méthode de recueil de données permet d'obtenir des images en première personne (Andrieu & Burel, 2014). De son côté, l'enseignant est équipé d'un micro-cravate et ses interventions sont enregistrées à l'aide d'une caméra extérieure pilotée par le chercheur.

Les données audiovisuelles recueillies pour chaque groupe d'élèves ont été codées à l'aide du cadre d'analyse développé par Schoenfeld (1985). Il consiste à découper le travail des élèves en blocs macroscopiques qu'il appelle épisodes : « An episode is a period of time during which an individual or a problem-solving group is engaged in one large task or a closely related body of tasks in the service of the same goal. » (p. 292). Schoenfeld distingue ainsi plusieurs catégories d'épisodes : *lecture, appropriation, exploration, planification/mise en œuvre* et *vérification*. En outre, Rott (2011, 2012) a été amené à introduire deux épisodes supplémentaires que nous reprenons également : *écriture* et *digression*.

Par ailleurs, le fait que, dans notre recherche, les élèves résolvent les problèmes en classe nous conduit à introduire un épisode supplémentaire qui permette de caractériser les moments où enseignant et élève(s) interagissent ensemble à propos de la résolution du problème. Nous appelons *régulation* de tels épisodes.

En ce qui concerne l'analyse en termes d'heuristiques, nous avons élaboré un manuel de codage qui se présente en une liste des différentes heuristiques issues de la littérature scientifique et qui respectent la définition que nous avons retenue. Nous en donnons un extrait dans le **Tableau 1**.

[1] Voir Favier (2022) pour les énoncés des deux autres problèmes ainsi que les analyses *a priori* correspondantes.

Faire un dessin, un schéma, une figure, un graphique
Organiser les données, les essais sous une forme particulière (lignes, colonnes, tableau)
Reformuler le problème
Introduire des noms ou des notations
Faire un essai
Générer de nouvelles données de manière systématique

***Tableau 1**. Extrait du manuel de codage des heuristiques*

Cette liste de départ a été mise à l'épreuve de certaines données expérimentales ce qui nous a amené à la compléter avec les trois heuristiques suivantes :

Recopier ou mettre en évidence certaines données
Introduire des artefacts ou du matériel
Aller chercher de l'information (manuel, internet, …)

***Tableau 2.** Nouvelles heuristiques issues de l'analyse de nos données expérimentales*

Dans notre façon de coder, nous avons marqué chaque occurrence pour chacune des heuristiques c'est ce qu'on appelle le type *occurrence codes* (Jacobs et al., 2003). Il est alors possible qu'une même heuristique soit codée à plusieurs reprises tout au long de la vidéo analysée ou au contraire qu'elle n'apparaisse jamais. Nous avons également dû résoudre une difficulté inhérente à la durée d'une heuristique qui impacte le codage temporel. En effet, certaines heuristiques (exemple : Recopier ou mettre en évidence certaines données) ont un empan assez large, quand d'autres (exemple : Introduire des noms ou des notations) sont très ponctuelles. D'ailleurs, pour une même heuristique (exemple : Faire un essai), nous pouvons être confronté à des durées très différentes selon la mise en œuvre des élèves. Dans tous les cas, nous avons fait le choix de coder comme une occurrence, le moment où les élèves évoquent l'heuristique ou le début de l'action lorsqu'ils la mettent en œuvre sans l'évoquer au préalable, cela ne prend donc pas en compte la durée.

Les données audiovisuelles ont été codées de manière indépendante par une assistante de recherche et par nous-même. Nous avons analysé le travail de 33 groupes en termes d'épisodes et de 17 groupes (parmi ces 33) pour les heuristiques. Pour chaque aspect, nous confrontions nos résultats de codage et lorsque ceux-ci ne coïncidaient pas, nous obtenions un consensus en recodant ensemble. Au niveau de l'accord inter-codeurs, nous avons calculé un *percent agreement* (Jacobs et al., 2003) égal à 0,76 concernant la nature des épisodes et 0,82 pour ce qui concerne les time-codes. Pour le codage des heuristiques, l'accord inter-codeurs est de 0,73 pour leur nature et de 0,85 pour les time-codes. Comme Tinsley et Weiss (1975), se référant à Guttman et al. (1971), le soulignent "there was a "tacit" consensus that 65% represented the minimum acceptable agreement". Ainsi, les pourcentages d'accord inter-codeurs calculés pour ces différents codages semblent donc tout à fait acceptables.

3.3 Résultats

En lien avec notre première question de recherche, nous avons confronté les résultats de codage avec les caractéristiques linéaires (modèle de Pólya) ou cycliques (modèle de Schoenfeld) ou ni linéaire, ni cyclique (modèle de Rott). Il s'avère que le travail de 7 groupes seulement sur les 33 peuvent être décrits avec ces caractéristiques (2 linéaires, 3 cycliques et 2 ni linéaire, ni cyclique).

Pour les autres groupes, nos analyses mettent en évidence de nombreux épisodes de régulation. Durant ces épisodes, la résolution du problème continue d'avancer du point de vue des élèves, il est donc nécessaire de les prendre en compte pour décrire et caractériser leur travail. Pour autant, du fait de l'intervention de l'enseignant, ces moments ne peuvent être considérés comme étant de même nature que les autres phases du modèle. Nous proposons ainsi d'enrichir le modèle de Rott (2012) en ajoutant une dimension supplémentaire appelée « Régulation ». La représentation en 3D (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) est intéressante pour symboliser que cette dimension supplémentaire se trouve sur un autre plan. Nos observations montrent que cette Régulation peut être connectée avec toutes les autres phases du modèle. Des doubles flèches représentent ces différentes connexions possibles.

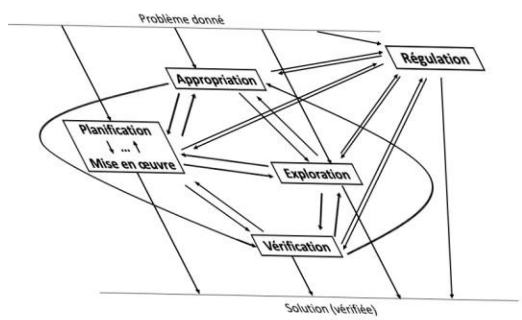


***Figure 3**. Proposition de modèle permettant de décrire les processus de résolution des élèves dans le cas d'interventions de l'enseignant*

Processus de résolution	Linéaire	Cyclique	Autres	Total
Sans régulation	2	3	2	7
Avec régulation(s)	3	6	17	26
Total	5	9	19	33

***Tableau 3**. Répartition des différents processus de résolution*

Ainsi, la répartition des différents processus de résolution (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) montre que la grande majorité des processus de résolution sont non linéaires et ceci aussi bien pour les élèves de primaire que du secondaire.

Pour ce qui est de l'analyse en heuristiques, nous avons opérationnalisé des concepts en lien avec l'idée d'espace-problème (Newell & Simon, 1972) à savoir les processus de construction de la représentation de Julo (1995) et le cheminement au travers d'espaces sémantiques (Poitrenaud, 1998). Nous ne pouvons pas rentrer dans les détails ici, mais nous avons ainsi pu mettre à jour trois profils d'élèves. Le premier que nous avons appelé *explorateur* montre une certaine persistance dans la recherche avant d'envisager et de changer de piste. On observe une bonne réussite du problème pour les élèves de ce profil. À l'opposé, les élèves du profil *papillonneur* ont tendance à effectuer une recherche plus superficielle qui se caractérise par de nombreuses pistes envisagées sans vraiment les investiguer. Néanmoins, ces élèves présentent une bonne capacité à imaginer différentes idées. Pour autant, la réussite n'est pas vraiment au rendez-vous pour ces élèves. Enfin, quelques groupes d'élèves combinent des caractéristiques propres à chacun des deux profils précédents, à savoir qu'ils envisagent sans les investiguer différentes pistes avant d'en approfondir une. Ce profil est dit *prospecteur* et présente un taux équilibré de réussites et d'échecs.

3.4 Perspectives

Ces résultats de recherche montrent l'insuffisance et la non adéquation des modèles utilisés dans l'enseignement dont le principal et le plus connu est celui linéaire de Pólya. De plus, le rôle significatif des heuristiques sur la résolution de problèmes est confirmé puisque dans notre recherche, elles permettent de discriminer différents profils d'élèves. Nous faisons l'hypothèse que les heuristiques sont un levier intéressant, à disposition des enseignants, pour aider les élèves à résoudre des problèmes. Un nouveau projet de recherche a été déposé pour transposer ces résultats et ceux issus des travaux de Chanudet (2019) en outil pour les enseignants qui souhaitent enseigner la résolution de problèmes. C'est ce que nous allons présenter à présent.

4. Un nouveau projet visant une recherche collaborative

Comme nous l'avons vu, la thèse de Chanudet (2019a) a permis de caractériser différents aspects des pratiques enseignantes en résolution de problèmes, en particulier évaluatives, et ce dans le contexte d'un cours spécifique à la résolution de problèmes au secondaire I. La thèse de Favier (2022) a, quant à elle, permis une analyse fine de l'activité des élèves en résolution de problèmes, au primaire et au secondaire. Toutefois ici, les problèmes proposés ont été choisis par le chercheur et les séances observées, ponctuelles, n'ont pas permis de prendre en compte un enseignement de la résolution de problèmes sur un temps long. Une recherche complémentaire menée par Chanudet et Favier (2020, 2021) s'est emparée de la question de l'identification et de la caractérisation des apprentissages possibles en résolution de problèmes, envisagée ici comme objet d'apprentissage. Ce travail est parti du constat, partagé par d'autres auteurs (Hersant, 2008; Houdement, 2009; Mercier, 2008) que dans les dispositifs visant à faire pratiquer la résolution de problèmes aux élèves ainsi que dans les parties des curricula dédiés, les apprentissages visés ne sont pas clairement exprimés et ne se réfèrent pas à des savoirs mathématiques précis. A l'appui du travail mené par Houdement (2009) qui met en avant le fait que les problèmes pour chercher à l'école primaire peuvent amener les élèves à développer, notamment, des apprentissages liés à des manières de raisonner et de valider en mathématiques, la réflexion a été étendue au niveau du secondaire et a conduit à identifier et caractériser des apprentissages possibles en résolution de problèmes comme relevant de démarches et de raisonnements mathématiques et de modes de preuves. Chanudet et Favier se sont également appuyés sur le travail de Jeannotte (2015) pour mettre en place une caractérisation du raisonnement mathématique envisagé selon le double point de vue de sa structure et des processus mobilisés. Il en ressort qu'un travail sur la résolution de problèmes peut amener les élèves à développer des apprentissages liés à des démarches par essais-ajustements ou de type expérimental, à des raisonnements hypothético-déductif, par implication logique, par exhaustivité des cas, par disjonction de cas, et à des preuves par ostension, par contre-exemple ou associées à la bonne mise en œuvre d'un raisonnement déductif. Ce point de vue sur les problèmes nous semble être un outil pertinent pour les enseignants pour leur permettre de penser et d'organiser un enseignement de la résolution de problèmes.

Ceci nous a conduit à vouloir mettre en place une recherche collaborative avec des enseignants du secondaire I pour étudier les processus de dévolution et d'institutionnalisation et sur cette base élaborer une ressource visant à outiller les enseignants pour enseigner la résolution de problèmes, portant à la fois sur les objectifs d'apprentissage visés et sur les moyens de développer ces apprentissages. Nous envisageons également, à travers une nouvelle thèse, de compléter nos travaux par l'étude des pratiques effectives et ordinaires des enseignants du primaire afin d'appréhender les gestes professionnels de ces enseignants en résolution de problèmes et de mieux comprendre comment ils organisent et gèrent de telles séances en classe. Ce serait le pendant de la thèse de Chanudet pour le primaire. Ainsi nous envisageons une recherche en deux volets, le volet portant sur le secondaire s'appuiera sur les résultats de nos précédents travaux et nous permettra d'envisager directement leur opérationnalisation via un travail collaboratif, tandis que le volet portant sur le primaire commencera par cibler les pratiques effectives des enseignants en résolution de problèmes avant d'analyser leur potentielle évolution à la suite d'un travail collaboratif. Dans la suite nous ne présentons que le volet du secondaire.

À l'appui de la revue de littérature et des travaux antérieurs de notre équipe, nous avons posé plusieurs hypothèses :

- Les processus de dévolution et institutionnalisation toujours complexes à gérer pour les enseignants, le sont d'autant plus dans le cadre de la résolution de problèmes du fait du manque d'identification précise des savoirs en jeu.
- De par leur complexité, les apprentissages en résolution de problèmes ne peuvent être envisagés que sur le long terme. De la même façon, les processus de dévolution et d'institutionnalisation liés aux capacités de recherche des élèves doivent eux aussi être pensés et étudiés dans une perspective à long terme.
- Du fait des raisons précédentes, la mise en œuvre par les enseignants de ces résultats de recherche est un point délicat. Nous faisons l'hypothèse que seule une recherche collaborative peut amener la prise en mains de tels « outils », leur amélioration et aussi permettre de documenter les processus en jeu en classe.

À partir de ces hypothèses, la question centrale qui guide notre nouveau projet porte sur l'impact de ce que font les enseignants sur l'activité des élèves en résolution de problèmes, à la lumière des processus de dévolution et d'institutionnalisation. Nous cherchons en particulier à répondre aux questions suivantes :

- Comment peut-on aider les enseignants à identifier les raisonnements, démarches et preuves de leur élèves en résolution de problèmes ?
- En quoi la prise en compte des processus de représentation inhérents à l'activité de résolution de problèmes peut permettre aux enseignants de soutenir l'activité mathématique des élèves ?
- Dans quelle mesure les heuristiques constituent-elles un levier de régulations pour l'enseignant et peuvent, à terme, être investies par les élèves eux-mêmes ?
- Quels types de régulations, tant sur le fond que sur la forme, sont pertinents pour soutenir l'activité et les apprentissages des élèves en résolution de problèmes ?
- Dans quelle mesure un travail collaboratif autour de ces divers éléments (régulations, heuristiques, représentations, démarches et raisonnements) peut-il influer sur les pratiques des enseignants et soutenir un déroulement efficace des processus de dévolution et d'institutionnalisation ?
- Peut-on identifier, chez les élèves, des connaissances « transparentes » en résolution de problèmes ?
- Quel type de ressource peut-on concevoir pour outiller les enseignants pour les aider à enseigner la résolution de problèmes ? Comment y intégrer au moins les deux dimensions sur les objectifs d'apprentissage visés et sur les moyens de développer ces apprentissages ?

Pour décrire et organiser le projet, nous nous appuyons sur la caractérisation des étapes d'une recherche collaborative au sens de Desgagné (1998). Il s'agira donc tout d'abord, en amont du début effectif du travail collaboratif), de présenter aux enseignants le projet tel que conçu initialement et les questions qui l'animent. Cette étape de « cosituation » centrale dans le processus collaboratif pourra nous amener à compléter ou préciser nos questionnements et nos objets d'étude afin de prendre en compte les préoccupations des enseignants.

Le début effectif du travail collaboratif se focalisera sur la préparation de séances dédiées à la résolution de problèmes, en amont de leur déroulement en classe. Il s'agira dans un premier temps de présenter et d'illustrer aux enseignants quelques références théoriques tirés de la littérature ainsi que des travaux issus du projet ResoPro. Nous reviendrons notamment sur la non-linéarité des processus de résolution de problèmes mis en avant et illustrés en détail dans la thèse de Favier (2022) et sur les types et l'articulation des différents épisodes (au sens de Schoenfeld (1985)) en jeu. Nous reviendrons ensuite sur les différents modes de raisonnements, démarches et preuves qui peuvent être mis en jeu lors de la résolution de problèmes. Un travail sera alors mené avec les enseignants pour les identifier dans différents problèmes, en vue de réfléchir ensuite collectivement au choix des problèmes à proposer aux élèves, à leur articulation à l'échelle d'une année scolaire et aux traces possibles d'institutionnalisation. Nous nous référons en particulier aux travaux de Julo (1995, 2002) sur la mémoire et les schémas de problèmes pour envisager un enseignement de la résolution de problèmes sur le long terme, et ainsi penser l'articulation des problèmes étudiés.

L'année suivante, le travail collaboratif sera axé sur le déroulement effectif des séances de résolution de problèmes en classe. La réflexion portera plus spécifiquement sur l'influence de ce que fait l'enseignant sur l'activité des élèves et sur les moyens de favoriser les processus de dévolution et d'institutionnalisation, dans une perspective de soutien à l'activité et aux apprentissages des élèves. Ceci constitue l'étape de « coopération ». Les enseignants expérimenteront dans leur classe les problèmes choisis précédemment. Sur la base des enregistrements audiovisuels des séances de résolution de problèmes, l'activité des élèves, leurs productions, les interactions entre élèves et enseignants et les interactions entre élèves lors des phases de travail en groupe seront analysées collectivement et discutées lors des séances de travail mensuelles qui se dérouleront sur des demi-journées. Il nous semble particulièrement intéressant de pouvoir suivre très finement l'activité réelle des élèves, ce à quoi les enseignants n'ont d'ordinaire pas accès. C'est pourquoi la méthodologie de recueil des données s'appuiera, entre autres, sur l'utilisation de caméras embarquées, fixées sur la tête des élèves. Il nous semble aussi important d'apporter différents types de regard sur ces séances en classe en se centrant spécifiquement sur les différentes pistes soulevées dans nos précédents travaux. Si la temporalité le permet, nous essaierons de partager nos analyses et ses résultats lors des réunions de travail avec les enseignants. L'idée est d'interroger l'évolution du processus de dévolution, les initiatives que prennent et qui sont laissées aux élèves, leur part d'autonomie dans la recherche d'une solution au problème et la manière dont se négocie le contrat didactique associé. En parallèle, le processus d'institutionnalisation sera étudié via la dialectique entre deux échelles de temps, les institutionnalisations locales, à l'échelle d'une séance et le réinvestissement sur plusieurs séances de ce qui a été institutionnalisé précédemment et l'émergence de savoirs qui ne peuvent se penser que sur le long terme. Pour pouvoir prendre en compte cette dynamique, il nous semble judicieux de cibler des problèmes amenant à mettre en œuvre un même type de raisonnement ou de démarche. Nous avons choisi de nous centrer sur les problèmes conduisant à mobiliser une démarche de type expérimental et ce pour plusieurs raisons. D'une part, parce que ces problèmes conduisent à une activité mathématique des élèves riche (faire des essais, établir des conjectures, tester, prouver). D'autre part, parce que nous avons pu observer que la gestion de ce type de problèmes est complexe du fait notamment de la diversité des procédures d'élèves. Enfin, car ces problèmes sont peu travaillés dans les classes ordinaires de mathématiques du secondaire à Genève.

En parallèle, la ressource de formation sera élaborée à l'appui du travail collaboratif mené. Elle aura pour vocation d'outiller les enseignants à concevoir, mettre en œuvre et gérer des séances de résolution de problèmes dans leur classe. Les enseignants qui le souhaitent pourront poursuivre la collaboration avec les chercheurs pour cette phase d'élaboration de cette ressource. Les contenus, qui s'appuieront sur le travail collaboratif mené et les résultats produits, mais aussi la forme de la ressource (capsule vidéo ou document écrit accompagné de vidéos de séances de classe et de leurs analyses notamment) seront discutés. Cette ressource sera ensuite diffusée à d'autres enseignants pour qu'ils la testent et que nous puissions recueillir et analyser leurs retours.

Ce projet vise à nous permettre de mieux comprendre ce qui se joue entre pratiques enseignantes et activité des élèves, lorsque l'on introduit largement la résolution de problèmes dans les classes, à travers l'étude du processus dual de dévolution/institutionnalisation. En outre, le travail débouchera sur la production d'un outil pour la formation initiale et continue des enseignants. Cette démarche devrait à la fois fournir des éléments aux enseignants sur les savoirs en jeu en résolution de problèmes, sur la gestion de telles séances en vue de soutenir les apprentissages des élèves.

BIBLIOGRAPHIE

ALLAL, L. (2007). Régulations des apprentissages : Orientations conceptuelles pour la recherche et la pratique en éducation. In L. Allal & L. Mottier Lopez (éds.), *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation* (p. 7-23). De Boeck.

ALLAL, L. (2008). Evaluation des apprentissages. In A. Van Zanten (éd.), *Dictionnaire de l'éducation* (p. 311-314). Presses Universitaires de France.

ALLAL, L., & MOTTIER LOPEZ, L. (2005). L'évaluation formative de l'apprentissage : Revue de publications en langue française. In *L'évaluation formative : Pour un meilleur apprentissage dans les classes secondaires* (p. 265-290). OCDE.

ANDRIEU, B., & BUREL, N. (2014). La communication directe du corps vivant. Une émersiologie en première personne. *Hermès, La Revue*, *1*, 46-52.

ARSAC, G., & MANTE, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Scéren édition.

BLACK, P., & WILIAM, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, *21*(5), 5-31.

BONAFE, F., SAUTER, M., CHEVALLIER, A., COMBES, M.-C., DEVILLE, A., DRAY, L., & ROBERT, J.-P. (2002). Les narrations de recherche du primaire au Lycée. *Brochure APMEP*, *151*.

BROUSSEAU, G. (2012). Des dispositifs Piagétiens... Aux situations didactiques. *éducation et didactique [En ligne]*, *6*(2). http://journals.openedition.org/educationdidactique/1475

BURGERMEISTER, P.-F., COPPE, S., CORAY, M., COUTAT, S., DE SIMONE, M., DORIER, J.-L., ESSONNIER, N., & VENDEIRA, C. (2021). La résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au cœur des apprentissages dans la classe de mathématiques. In A. Chesnais & H. Sabra (éds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2020* (p. 173-202). IREM de Paris. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03545511

CELI, V., COUTAT-GOUSSEAU, S., & VENDEIRA, C. (2019). Travailler avec les formes en maternelle : Premiers pas vers des connaissances géométriques ? *Actes du 45ème Colloque de la COPIRELEM. Manipuler, Représenter, Communiquer : Quelle place pour les artefacts dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?* 35-55.

CHANUDET, M. (2019). *Etude des pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques* [Doctorat en didactique des mathématiques]. Université de Genève.

CHANUDET, M., & FAVIER, S. (2020). *Modes de raisonnement et de preuve en résolution de problèmes en mathématiques.* [Journées romandes des formateurs en didactique des mathématiques : Connaissances mathématiques et connaissances didactiques des enseignants].

CHANUDET, M., & FAVIER, S. (2021). Les démarches et modes de raisonnement en jeu dans les problèmes de « Recherche & stratégies » en 10H. *Revue de mathématiques pour l'école*, *235*, 88-98.

CHOQUET-PINEAU, C. (2014). *Une caractérisation des pratiques de professeurs des écoles lors de séances de mathématiques dédiées à l'étude de problèmes ouverts au cycle 3* [Thèse de doctorat en didactique des mathématiques]. Nantes.

COPPE, S., DE SIMONE, M., DORIER, J.-L., & ESSONNIER, N. (2022). La résolution de problèmes en mathématiques vue par les élèves et par les enseignants à Genève. In Swissuniversities (éd.), *Le développement des didactiques disciplinaires dans le champ scientifique en Suisse : Bilan et perspectives. Prépublication du 5ème Colloque des didactiques disciplinaires – Locarno—8-9 Avril 2022* (p. 54-61). https://www.swissuniversities.ch/fr/themes/didactique-disciplinaire/colloque-didactiques-disciplinaires

COPPE, S., & DORIER, J.-L. (à paraître). *La résolution de problème au cœur de l'activité mathématique. Quels enjeux pour l'apprentissage ?* GPA Éditions.

COUTAT, S., & VENDEIRA, C. (2015). Des pointes, des pics et des arrondis en 1P-2P. *RMé*, *223*, 14-19.

COUTAT, S., & VENDEIRA, C. (2018). *Document d'accompagnement : Activités pour la classe de 1P-2P, Espace (MSN11), Figures géométriques, Travailler autrement les formes géométriques au cycle 1.* https://www.unige.ch/fapse/dimage/files/3915/4953/5358/CV-Activites-1P-2P.pdf

COUTAT, S., & VENDEIRA, C. (2019). Reconnaissance de formes à l'école maternelle, un point de vue didactique et psychologique. In S. Coppe, E. Roditi, V. Celi, F. Chellougui, F. Tempier, C. Allard, C. Corriveau, M. Haspekian, P. Masselot, S. Rousse, H. Sabra, & M. Kiwan Zacka (éds.), *Nouvelle perspectives en didactique : Géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques. Actes de la 19e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 283-300). La pensée sauvage.

DESGAGNE, S. (1998). La position du chercheur en recherche collaborative : Illustration d'une démarche de médiation entre culture universitaire et culture scolaire. *Recherches qualitatives*, *18*, 77-105.

DORIER, J.-L., & MAASS, K. (2020). Inquiry-Based Mathematics Education. In S. Lerman (éd.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 384-388). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_176

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*, 37-65.

FAVIER, S. (2022). *Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève* [Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation, Université de Genève]. https://archive-ouverte.unige.ch/unige:159466

FEIGENBAUM, E. A., & FELDMAN, J. (1963). *Computers and thought* (McGraw-Hill).

GEORGET, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : Perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants* [Thèse de doctorat en didactique des mathématiques]. Université Paris Diderot.

GUTTMAN, H. A., SPECTOR, R. M., SIGAL, J. J., RAKOFF, V., & EPSTEIN, N. B. (1971). Reliability of coding affective communication in family therapy sessions : Problems of measurement and interpretation. *Journal of Consulting and Clinical Psychology*, *37*, 397-402.

HERSANT, M. (2008). « Problèmes pour chercher ». Des conduites de classe spécifiques. *Grand N*, *81*, 57-75.

HERSANT, M. (2010). *Empirisme et rationalité au cycle 3, vers la preuve en mathématiques* [Mémoire complémentaire pour l'Habilitation à diriger des recherches].

HOUDE, O. (2019). *Comment raisonne notre cerveau* (Que sais-je?).

HOUDEMENT, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *14*, 31-59.

JACOBS, J., GARNIER, H., GALLIMORE, R., HOLLINGSWORTH, H., BOGARD GIVVIN, K., RUST, K., KAWANAKA, T., SMITH, M., WEARNE, D., MANASTER, A., ETTERBEEK, W., HIEBERT, J., & STIGLER, J. (2003). *Third International Mathematics and Science Study 1999 Video Study Technical Report. Volume 1 : Mathematics.* Institute of Education Statistics, U. S. Department of Education.

JEANNOTTE, D. (2015). *Raisonnement mathématique : Proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* [Thèse de doctorat en éducation]. Université du Québec.

JULO, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.

JULO, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, *69*, 31-52.

KAHNEMAN, D. (2012). *Système 1/ système 2 : Les deux vitesses de la pensée* (Flammarion).

KIWAN ZACKA, M. (2018). *Des pratiques d'enseignement de l'algèbre élémentaire aux apprentissages des élèves. Cas des expressions algébriques en EB7 et EB8 au Liban* [Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation]. Université Saint Joseph, Liban.

KOICHU, B., BERMAN, A., & MOORE, M. (2006). Patterns of middle school students' heuristic behaviors in solving seemingly familiar problems. In Novotna, J., Moraova, H., Kratka, M. & Stehlikova, N., Kratka, M., & Stehlikova, N. (éds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, p. 457-464).

LACKOVA, J. (2018, décembre 28). *La constitution du milieu lors d'une démarche d'investigation : Une analyse en termes des dialectiques question/réponse et média/milieu*. Le Colloque International : la Pédagogie et la Didactique des Disciplines Scientifiques « CIPDDS'18 », Tanger, Maroc.

LACKOVA, J. (2020). The place of inquiry in mathematics taught within the International Baccalaureate
La place de l'enquête en mathématiques enseignées au sein du Baccalauréat International. *Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *22*(4), 603-611. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p603-611

LACKOVA, J. (2021). The Constitution of the « Milieu » During an Inquiry Process : An Analysis in Terms of Question-Answer and Media-Milieu Dialectics. In B. Barquero, I. Florensa, P. Nicolas, & N. Ruiz-Munzon (éds.), *Extended Abstracts Spring 2019* (p. 149-158). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76413-5_17

LACKOVA, J., & DORIER, J.-L. (2018). La démarche d'investigation dans le cadre du Baccalaureat International. *Actes du colloque EMF 2018*. Mathématique en scène - des ponts entre les disciplines, Paris (Gennevilliers). Prochainement disponible en ligne.

MERCIER, A. (2008). Une question curriculaire de l'enseignement élémentaire des mathématiques : La « résolution de problèmes ». *Programme national de pilotage. Actes du séminaire national. L'enseignement des mathématiques à l'école primaire*, 93-116.

NEWELL, A., & SIMON, H. A. (1972). *Human Problem Solving*. Prentice-Hall.

POITRENAUD, S. (1998). *La représentation des procédures chez l'opérateur. Description et mise en oeuvre des savoir-faire.* [Thèse de Doctorat]. Université de Paris 8.

POLYA, G. (1957). *Comment poser et résoudre un problème (Traduit de : How to solve it)* (Dunod).

POLYA, G. (1989). *Comment poser et résoudre un problème (Traduit de : How to solve it)*. J. Gabay.

POSAMENTIER, A. S., & KRULIK, S. (2009). *Problem solving in mathematics, grades 3-6 : Powerful strategies to deepen understanding*. Corwin Press.

RICHARD, J.-F. (1994). La résolution de problèmes. In *Traité de psychologie expérimentale* (Vol. 2, p. 523-570). Presses Universitaires de France.

RICHARD, J.-F. (2004). *Les activités mentales* (4e éd.). Armand Colin.

ROBERT, A. (2004). Que cherchons-nous à comprendre dans les pratiques des enseignants ? Quelles analyses menons-nous ? In M.-L. Peltier-Barbier (éd.), *Dur d'enseigner en ZEP. Analyse des pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en réseaux d'éducation prioritaire* (p. 15-32). La pensée sauvage.

ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : Une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *2*(4), 505-528.

ROBERT, A., & VANDEBROUCK, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : Analyses de séances sur les tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *34*(2-3), 239-283.

ROMANYCIA, M. H., & PELLETIER, F. J. (1985). What is a heuristic? *Computational Intelligence*, *1*(1), 47-58.

ROTT, B. (2011). Problem Solving Processes of Fifth Graders : An Analysis. In B. Ubuz (éd.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 65-72).

ROTT, B. (2012). Models of the problem solving process–A discussion referring to the processes of fifth graders. In T. Bergqvist (éd.), *Learning Problem Solving and Learning Through Problem Solving, proceedings from the 13th ProMath conference* (p. 95-109).

ROTT, B. (2014). Rethinking Heuristics – Characterizations and Examples. In A. Ambrus & E. Vasarhelyi (éds.), *Problem Solving in Mathematics Education – Proceedings of the 15th ProMath Conference* (p. 176-192).

RUIZ-PRIMO, M. A., & FURTAK, E. M. (2004). *Informal Formative Assessment of Students' Understanding of Scientific Inquiry* (CSE N° 639).

RUIZ-PRIMO, M. A., & FURTAK, E. M. (2007). Exploring Teachers' Informal Formative Assessment Practices and Students' Understanding in the Context of Scientific Inquiry. *Journal of Research in Science Teaching*, *44*(1), 57-84.

SCHOENFELD, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press Inc.

TINSLEY, H. E., & WEISS, D. J. (1975). Interrater reliability and agreement of subjective judgments. *Journal of Counseling Psychology*, *22*(4).

TONGE, F. M. (1960). Summary of a heuristic line balancing procedure. *Management Science*, *7*(1), 21-42.

VENDEIRA, C., & COUTAT, S. (2017). « C'est une montagne ou une trompette ? » entre perception globale et caractéristiques des formes au cycle 1 et 2. *Grand N*, *100*, 79-104.

VERSCHAFFEL, L. (1999). Realistic mathematical modeling and problem solving in the upper elementary school : Analysis and improvement. In J. H. M. Hamers, J. E. H. Van Luit, & B. Csapo (éds.), *Teaching and learning thinking skills* (Lisse: Swets&Zeitlinger, p. 215-239).

Faire vivre les articulations entre abstrait et concret dans la classe de mathématiques. Un levier pour penser les rapports entre mathématiques et réalité

Viviane Durand-Guerrier
IMAG université de Montpellier, CNRS, Montpellier, France

RÉSUMÉ

Dans ce texte, je me propose de donner des arguments pour soutenir la thèse de nature épistémologique selon laquelle la prise en compte explicite des articulations entre abstrait et concret est une nécessité pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques tout au long du curriculum. Ceci va de pair avec la thèse didactique selon laquelle le travail sur les objets, leurs propriétés et des relations qu'ils entretiennent entre eux jouent un rôle central dans l'apprentissage des mathématiques. J'illustrerait ceci sur quelques exemples en mathématiques et je présenterai quelques travaux ouvrant des pistes pour penser le rôle des mathématiques dans les activités interdisciplinaires à la lumière de cette articulation.

1. INTRODUCTION

Dans ce texte, je me propose de donner des arguments pour soutenir la thèse de nature épistémologique selon laquelle la prise en compte explicite des articulations entre abstrait et concret est une nécessité pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques tout au long du curriculum. Ceci va de pair avec la thèse didactique selon laquelle le travail sur les objets, leurs propriétés et des relations qu'ils entretiennent entre eux jouent un rôle central dans l'apprentissage des mathématiques (Dias et Durand-Guerrier 2005), ce qui revient à mettre au cœur du questionnement didactique la sémantique au sens logique du terme et ses articulations avec la syntaxe et la pragmatique, au sens de Morris (1938) ou Eco (1980) :

- La sémantique concerne les relations entre les signes et les objets auxquels ils réfèrent.
- La syntaxe concerne les règles d'intégration des signes dans un système donné.
- La pragmatique concerne les relations entre les sujets et les signes : les signes perçus en fonction de leur origine, des effets qu'ils produisent, et de leurs usages.

Je fais également l'hypothèse que ceci ouvre des pistes pour penser le rôle des mathématiques dans les activités interdisciplinaires.

En incluant l'introduction, ce texte est structuré en cinq parties. Les sections 2 à 4 sont très largement reprises d'un texte publié dans les actes du Colloquium co-organisé par l'ARDM et la CFEM en novembre 2018 (Durand-Guerrier, 2018). Dans la section 2, je montre sur l'exemple classique de l'agrandissement du puzzle que la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau 1998) offre un levier pour penser le rapport au monde des connaissances mathématiques. Dans la section 3, je soutiendrai la thèse épistémologique et didactique selon laquelle la géométrie de l'école est un élaboration conceptuelle stable permettant d'agir dans et sur le monde. Dans la section 4, je montrerai que la construction du nombre à l'école primaire met en jeu une dialectique subtile entre objets concrets et objets abstraits, avant de jouer le rôle d'objets concrets dans le cadre de l'introduction au calcul littéral. Dans la dernière section, je donnerai quelques exemples de travaux soutenant l'hypothèse de la pertinence de la prise en compte des relations entre abstrait et concret pour éclairer le rôle des mathématiques dans les activités interdisciplinaires.

2. LA THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES COMME LEVIER POUR PENSER LES RAPPORTS AU MONDE DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES

La Théorie des Situations Didactiques offre une méthodologie de recherche qui permet d'insérer les situations didactiques singulières dans un réseau plus vaste de significations, par la confrontation aux objets (situation d'action), au discours sur les objets (situation de formulation), et à l'insertion dans un réseau de connaissances dans un processus d'argumentation et de preuve (situations de validation et d'institutionnalisation). Nous allons illustrer ceci par l'exemple de l'agrandissement du puzzle dont nous rappelons ci-dessous les consignes dans la version donnée dans Brousseau (1998).

Voici des puzzles. Vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles, en respectant la règle suivante : le segment qui mesure quatre centimètres sur le modèle devra mesurer sept centimètres sur votre reproduction.

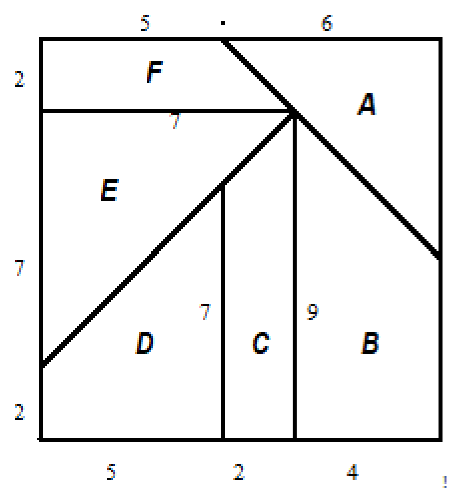


***Figure 1**. Le puzzle distribué aux élèves (Brousseau 1998)*

La situation s'adresse à des élèves de 9-10 ans. Les élèves travaillent en équipes de 5.

Ils doivent se mettent d'accord sur une méthode commune d'agrandissement, puis ils se séparent, chacun allant agrandir sa pièce suivant la méthode commune retenue. Ceci fait, le groupe se reforme et les élèves essayent de reconstituer le puzzle agrandi avec les pièces réalisées individuellement. Parmi les méthodes susceptibles d'apparaître à ce niveau, il y a une méthode erronée attendue qu'il s'agira de remettre en cause : ajouter 3 cm à chacune des dimensions. Compte tenu de la découpe choisie pour le puzzle, cette méthode ne permet pas de reconstituer le puzzle agrandi. Ceci apparaît assez clairement visuellement ; en effet, outre le fait que les pièces ne s'ajustent pas, avec cette méthode, on ajoute trois fois 3 cm aux côtés verticaux et deux fois 3 cm aux côté horizontaux, si bien que la figure reconstituée n'est plus un carré, contrairement au puzzle initial. Après accord sur ce point, les élèves sont invités à chercher une autre méthode.

Dans cette première partie de la situation, les élèves sont confrontés au fait que la procédure additive ne permet pas de reconstituer le puzzle ; on observe un non-respect des formes, des angles, du parallélisme. Autrement dit, la réalité résiste ; elle disqualifie le modèle additif et permet de se mettre d'accord sur ce que signifie « conserver la forme ». Ceci met en évidence le fait que les mathématiques « ont des comptes à rendre au réel ». La suite de la situation va permettre progressivement d'établir que pour pouvoir reconstituer le puzzle conformément au modèle affiché par le professeur au tableau, la méthode pour agrandir les pièces consiste à multiplier les longueurs de tous les côtés par un même nombre. Ceci se justifie par trois aspects interdépendants : la conservation de la forme qui relève de l'aspect perceptif ; la conservation des angles et du parallélisme qui relève de l'aspect géométrique ; la proportionnalité des mesures de longueurs, qui relève de l'aspect numérique. Ceci est en lien avec des résultats et notions qui seront étudiés plus tard dans le curriculum : le théorème de Thalès, l'homothétie, les similitudes.

3. LA GÉOMÉTRIE COMME ÉLABORATION CONCEPTUELLE STABLE PERMETTANT D'AGIR DANS ET SUR LE MONDE.

Les questions épistémologiques soulevées par les rapports entre la Géométrie comme théorie et les objets et situations du monde ont fait l'objet d'une abondante littérature. Je me réfère ici à quelques auteurs qui de part mon expérience de chercheuse et de formatrice sont de nature à éclairer les questions didactiques posées par l'enseignement de la géométrie.

Sinaceur (1991) se référant à Gonseth écrit : « Le sens d'un concept lui vient de la pratique dans laquelle il a été forgé pour des besoins précis. (…). Ainsi la géométrie des Grecs est une dialectique de l'espace physique à travers l'espace sensible » (Sinaceur, 1991, p. 195)

Elle ajoute

> « Cette interpénétration remarquable entre intuition et schématisation, formel et non formel, abstrait et concret était déjà présente dans Les mathématiques et la réalité[1], où Gonseth remarquait (p.300) que les éléments du domaine d'un modèle peuvent être pris dans le « monde des choses » ou «dans le monde des abstraits » (op.cit.p.200)

Giusti (2000) commentant la définition de la sphère donnée par Euclide va dans le même sens :
« La sphère est une figure enclose par une demi-circonférence qui tourne autour du diamètre jusqu'à revenir au lieu d'où elle était partie » (Euclide Livre X1) « qui évoque plus le tour de l'ouvrier que le compas du géomètre » (Giusti, 2000, p.22)

Cette relation entre géométrie et monde sensible est l'objet de l'ouvrage de Nicod (1924) intitulé La géométrie dans le monde sensible. Au chapitre 4, Points et volumes, il écrit :

> « La géométrie pourrait de même s'accommoder de l'absence d'une valeur simple du point dans la nature, si quelque conception physique complexe se trouvait en jouer le rôle. Mais la géométrie elle-même nous met sur la voie d'une telle conception. Car il n'est pas vrai qu'elle considère nécessairement le point comme un terme simple. On peut concevoir des systèmes qui posent le point comme composé, et composé de termes plus faciles à interpréter dans la nature. »

Longo (1997) commentant l'ouvrage d'Alain Berthoz (1997), *Le sens du mouvement*, fait l'hypothèse du rôle crucial des nos expériences spatiales :

> « Le triangle, le carré, le cercle mathématiques ne sont peut-être pas des « généralisations » (…) de la vision des pierres rondes ou carrées comme nous le

[1] Gonseth (1936)

> proposent les empiristes, mais ils sont des reconstructions à l'aide de la mémoire d'une pluralité d'actes d'expériences spatiales. » (op. cit. p. 207)

Ces quelques citations font écho aux questions posées par les travaux de Berthelot et Salin (1992) que nous n'avons pas abordés dans cet exposé. Ces réflexions épistémologiques étaient au cœur des travaux que nous avons conduits avec Thierry Dias dans le cadre de ses travaux de DEA et de Doctorat (Dias et Durand-Guerrier, 2005 ; Dias, 2008) autour d'un problème classique en géométrie des solides qui permet de poser en classe la question des relations entre l'Espace et le Plan. La situation est construite autour du problème consistant à déterminer tous les polyèdres réguliers. La définition d'un polyèdre régulier est donnée sous la forme suivante : un polyèdre régulier est un polyèdre convexe, dont les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables (identiques), et tel que à chaque sommet correspond le même nombre de faces. Des pièces en plastique permettant de réaliser des polyèdres sont mises librement à disposition des participants. Ce problème peut être proposé sous cette forme à différents publics – école primaire, collège, lycée, université, formation des enseignants du primaire ou du secondaire, animations mathématiques.

Le point nodal de la situation réside dans l'impossibilité de réaliser un polyèdre avec des faces hexagonales régulières. Ceci en lien avec le fait que l'on peut paver le plan avec des hexagones réguliers. Cette situation pose donc de manière « naturelle » la question des relations entre Espace et Plan. Au cours des nombreuses mises en œuvre que nous avons faites, trois grandes catégories de démarches ont été observées :

- exploration directe avec le matériel
- allers et retours entre recherche papier/crayon et exploration avec le matériel
- recherche papier/crayon avant toute exploration avec le matériel, voire refus d'une telle exploration.

La confrontation avec la réalité s'avère le plus souvent cruciale. En effet, une conjecture fréquente émerge au début du travail : *il y a une infinité de polyèdres réguliers, un exactement pour chaque type de polygone régulier.*

Compte tenu du matériel disponible, les tentatives de réaliser un polyèdre régulier à faces hexagonales peuvent permettre de remettre en cause cette conjecture, mais cela prend parfois beaucoup de temps, en raison en particulier de la souplesse relative du matériel, et ce quel que soit le niveau considéré. Il n'est pas rare que certains participants soient convaincus qu'à condition de mettre suffisamment d'hexagones réguliers, on pourra obtenir une courbure (Dias & Durand-Guerrier, 2005, p.73). Pour se convaincre de l'impossibilité, certains participants font parfois référence au fait que l'on peut paver le sol avec des hexagones réguliers, ceci en lien avec le fait que la somme des angles au sommet pour trois hexagones réguliers est égale à la somme de quatre angles droits, et donc que l'on ne peut pas sortir du plan (ibid, pp. 73-74). Une fois cette impossibilité actée, l'émergence de la condition sur les angles pour pouvoir réaliser un polyèdre convexe apparaît en général. Elle permet de prédire que le nombre maximum de polyèdres réguliers est 5. Le fait de pouvoir les construire garantit leur existence empirique. Cette situation met en jeu une dialectique entre abstrait et concret bien identifiée par Gonseth:

> « La dialectique en général et celle de l'espace en particulier résolvent le problème fondamental posé dans Les mathématiques et la réalité, celui de la « connexion » entre

> subjectif et objectif, pensé et donné, rationnel et réel, théorique et expérimental, abstrait et concret » (Sinaceur, 1991, p.192, à propos de Gonseth).

Elle illustre le propos de Longo :

> « La cohérence et l'objectivité de la construction conceptuelle que […] nous proposons, dans ce cas la géométrie, se fonde sur l'efficacité de notre action dans le monde car le monde ses symétries, sa connexion, ses régularités s'imposent à nous ou font résistance quand nous agissons ainsi que quand nous proposons une théorie (…). » (Longo , 1997, p.207)

La fin de cette citation attire notre attention sur le fait qu'une théorie géométrique qui ne prendrait pas en compte cette dialectique entre Plan et Espace ne serait pas adaptée pour rendre compte des propriétés de ces objets du micro ou du méso espace que sont les polyèdres, et partant pour les activités associées de nature spatio-géométrique, au sens de Berthelot & Salin (1992). Faire vivre en classe la dialectique entre objets sensibles et objets théoriques de la géométrie est un enjeu essentiel de la scolarité obligatoire si l'on veut préparer les élèves à la diversité des besoins qu'ils sont susceptibles de rencontrer dans la suite de leurs études et dans leur vie professionnelle.

4. LA DIALECTIQUE ABSTRAIT / CONCRET –LE CAS DES NOMBRES ENTIERS

4.1 La construction du nombre à l'école primaire : une dialectique subtile entre objets concrets et objets abstraits

Alors que j'étais en poste à l'IUFM de Lyon au début des années 2000, j'ai été chargée de faire des formations sur les relations entre grandeurs et mesures à l'école primaire. Au fil des lectures conduites pour préparer cette formation, j'ai été interpellée par une remarque du Guy Brousseau dans son cours pour la XI° école d'été de didactique des Mathématiques, intitulé: *Les grandeurs dans la scolarité obligatoire* : « Les entiers naturels vont apparaître dans la mesure de la grandeur probablement la plus primitive : le cardinal des collections finies. » (Brousseau, 2002)

Il m'est apparu alors que ce point de vue sur les entiers naturels pouvait non seulement éclairer la distinction entre grandeurs et mesures souvent identifiées l'une a l'autre par les professeurs d'école, mais aussi éclairer le processus de construction du nombre à l'école primaire, en mettant en lumière une dialectique entre objets concrets et objets abstraits, que je me propose d'expliciter dans ce qui suit.

Nous sommes à l'école maternelle, dans un atelier autour du nombre ; des objets matériels sont posés sur une table. Notez que des objets posés sur une table ne forment pas en soi une collection. On peut fabriquer une collection en les rassemblant, en les embrassant du regard, en les entourant de fil, en décidant de les comparer à une collection existante etc. On obtient alors une réalisation concrète de l'objet abstrait « collection ». Construire en acte ce concept est une première étape pour s'engager dans l'étape suivante qui va consister à comparer la taille de deux collections : étant donné deux collections, on peut s'intéresser à la question de savoir si elles contiennent autant d'objets l'une que l'autre ou si une des deux collections contient plus d'objets que l'autre. Pour répondre à cette question, on peut réaliser une mise en correspondance terme à terme, en déplaçant les objets concrets constituant les deux collections pour les mettre en vis à vis. C'est une réalisation concrète qui permet de répondre à une question posée sur des objets abstraits (les collections). Ce protocole est associé à un nouvel objet abstrait (une grandeur) : « taille d'une collection discrète finie », et aux trois relations binaires : « avoir la même taille que » ; « être de plus grande taille que » ; « être de plus petite taille que ».

A l'école maternelle (moyenne et grande section, 4-5 ans), les élèves rencontrent de nombreuses collections, qui deviennent progressivement des objets concrets, au sens où dans de très nombreuses situations, les objets matériels sont appréhendés comme étant organisés en collections, certaines jouant le rôle de collections témoins pour la construction de la mesure associée.

Pour comparer des collections d'objets matériels qui ne sont pas dans le même espace (par exemple dans deux pièces différentes) et que l'on ne peut pas déplacer, on peut utiliser une collection de référence (par exemple des jetons neutres, ou des barres sur une bande de papier) que l'on peut transporter dans l'autre pièce. On a ainsi une collection de référence concrète, qui permet de travailler en acte la transitivité de la relation « avoir la même taille que ». On peut alors s'intéresser à fabriquer des collections ayant la même taille qu'une collection donnée, ou ayant une plus grande/plus petite taille qu'une collection donnée.

Ceci permet plus généralement de travailler, avec des objets concrets, la grandeur « taille d'une collection discrète finie », et d'en faire un objet familier. L'étape suivante (grande section, 5-6 ans) consiste à fabriquer une famille de collections de référence à partir de la suite ordonnée des nombres entiers naturels énoncée oralement (réalisation concrète d'une section commençante de N). La mise en correspondance terme à terme de différentes collections avec des sections commençantes de N permet d'identifier que pour certaines paires de collections, le dernier mot nombre énoncé est le même, ce qui permet de définir des classes de collections. Finalement, il s'agit de comprendre que ce dernier mot nombre énoncé permet de répondre à la question « combien y-a-t-il d'objets dans la collection considérée ?».

Ce parcours va permettre la mise en place du schème du dénombrement (Vergnaud 1991) à la fin de l'école maternelle :

- coordination des mouvements des yeux et des gestes du doigt et de la main par rapport à la position des objets,
- énoncé coordonné de la suite numérique,
- cardinalisation de l'ensemble dénombré par un soulignement tonique ou par répétition du dernier mot-nombre prononcé.

Pour Vergnaud, un schème est « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée ». C'est dans les schèmes qu'il faut chercher les connaissances-en-acte du sujet, qui permettent à l'action d'être opératoire. Comme il le souligne, l'automatisation est l'une des manifestations les plus visibles du caractère invariant de l'organisation de l'action, ce qui n'exclut pas un contrôle conscient. (Vergnaud 1991, p. 135-136)

Pour Vergnaud, un schème est composé de règles d'action et d'anticipation, d'invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte, inférences-en–acte) indispensables à la mise en œuvre du schème (op. cit. p.142). On peut ainsi identifier des inférences en acte dans la mise en œuvre du schème du dénombrement, par exemple :

- si chaque objet a été pointé une fois et une seule, le dernier mot-nombre énoncé permet de répondre à la question « combien ?» (règle d'action, théorème en acte) ;
- chaque objet a été pointé une fois et une seule (prémisse) ; ceci suppose la mise en œuvre correcte des deux premières étapes du schème.
- le dernier mot-nombre énoncé est la réponse à la question « combien ? » (conclusion).

La stabilisation de ce schème à la fin de l'école maternelle va permettre de disposer d'un concept-en-acte de nombre entier naturel et partant de s'engager dans la construction des opérations sur les entiers dans une dialectique entre syntaxe et sémantique.

Dans la construction des entiers naturels à l'école primaire, on peut identifier les trois dimensions, sémantique, syntaxe et pragmatique, mentionnées au début de ce texte : les collections ; les quantités auxquelles renvoient les écritures ou les collections témoins ou d'autres signes utilisés en lieu et place des nombres ; la comparaison par correspondance terme à terme renvoient à la sémantique. La liste ordonnée des nombres, les règles d'écritures dans un système de numération donné renvoient à la syntaxe. L'utilisation ou non du schème du dénombrement ; la reconnaissance ou non des collections témoins ; la manière d'organiser une collection pour pouvoir la dénombrer ; la manière d'utiliser les nombres entiers ; la mise en relation ou non entre écriture et quantité renvoient à la dimension pragmatique. On retrouve ces trois dimensions dans l'apprentissage des opérations sur les entiers naturels, par exemple, dans le cas de l'addition.

Sémantique : L'addition des entiers est définie comme le cardinal de la réunion de deux collections discrètes finies disjointes . Le résultat est indépendant de la nature des objets en jeu sous réserve que mélanger les objets préserve leur intégrité.

Syntaxe : L'addition est définie comme l'itération du successeur ; cela ne nécessite pas la référence aux quantités. Cette définition permet de fonder les algorithmes dans un système donné de numération.

Pragmatique : L'articulation entre les deux aspects se construit par un va-et-vient entre calculs (syntaxe) et comptage effectif des collections d'objets, incluant les groupements (sémantique). Le comptage effectif permet de valider la commutativité de l'addition d'un point de vue sémantique.

A la fin de l'école primaire, on peut faire l'hypothèse que la fréquentation des nombres entiers naturels et des opérations sur ces nombres a permis de développer une familiarité qui va leur permettre de jouer le rôle d'objets concrets (au sens de Paul Langevin) qui pourront être engagés dans de nouveaux apprentissages. Ceci suppose que les actions mises en œuvre sur ces objets fournissent au sujet des informations suffisamment fiables pour soutenir des conjectures d'une part, permettre leur mise à l'épreuve d'autre part.

A l'école primaire, on l'a vu, ce sont les collections discrètes qui jouent le rôle de sémantique pour la construction du nombre et des opérations.

A partir du collège et au lycée, comme le souligne Y. Chevallard, c'est le domaine des nombres entiers naturels qui va servir de sémantique pour la construction du calcul littéral et de l'algèbre.

> « Lorsqu'en classe de seconde, l'enseignant passe de l'observation que 2+3 = 5 et 3+2 = 5 à l'écriture de la relation générale a+b = b+a, il passe alors d'un calcul sur les nombres (entier naturel) à un calcul algébrique (à coefficients entiers naturels). En d'autres termes, un calcul algébrique que nous ne définirons pas plus précisément ici, rend manifeste une syntaxe à laquelle le domaine de calcul associé fournit une sémantique. » (Chevallard, 1989, p.50.

C'est ce que l'on peut observer dans la mise en œuvre d'une situation d'introduction au calcul littéral que je présente ci-dessous.

4.2 Une situation d'introduction au calcul littéral

Cette situation a été développé dans la thèse de G. Barallobres. Elle est présentée et discutée dans Barallobres et Giroux (2008). Il s'agit de trouver le plus rapidement possible la somme de dix nombres consécutifs (entiers naturels). L'organisation de la situation comporte des phases d'action, de formulation et de validation au sens de la théorie des situations didactiques. Les élèves (12-13 ans) sont par équipe de 4 ou 5. Le jeu comporte trois étapes.

Étape 1 : celui qui trouve la somme a gagné

Série 1 : 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28

Série 2 : 783, 784, 785, 786, 787 788 789 790,791, 792

Étape 2 : Temps de réflexion.

Trouver une méthode pour trouver la somme le plus vite possible quels que soient les nombres proposés par le professeur. Reprise du jeu avec des nombres de plus en plus grands.

Étape 3 : Recherche des raisons qui permettent d'expliquer pourquoi la méthode marche pour toute série de dix nombres naturels consécutifs.

Bilan des méthodes et présentation du travail de chaque équipe.

Les chercheurs notent deux méthodes reconnues comme les plus efficaces par les élèves.

La première consiste à multiplier le premier nombre par 10 et à ajouter 45, ce qui peut se traduire par la formule 10n+45, acceptée par la majorité de la classe ; elle s'appuie soit sur la décomposition 19, 19 +1, 19 +2, 19 + 3, …. 19+ 9, soit sur la décomposition additive en dizaine et unité 10 + 9, 20, 20 + 1 etc.. Dans ce dernier cas, l'origine de 45 ne va pas de soi.

La deuxième méthode consiste à ajouter 5 au cinquième nombre de la liste. Pour la série 1 qui commence par 19, on obtient 235 ; le groupe qui l'a produite déclare avoir observé les différentes séries proposées et les résultats obtenus.

Pour les auteurs, le milieu construit au cours du travail en équipe par les élèves ayant adopté une stratégie conduisant à la première méthode devrait a priori être plus riche pour la validation que celui construit par les élèves ayant produit la deuxième méthode (point de vue des auteurs). Cependant, un élève de ce dernier groupe est capable très rapidement de faire le lien entre sa méthode (ajouter 5 à droite du 5ème nombre) et la première méthode sur la série qui commence par 15 (résultat 195)

> « E2 : Oui, parce que le cinquième nombre a déjà le « 4 » ajouté, parce que la première méthode est « fois 10 » et après plus 45.
> Professeur : j'écris l'autre méthode pour vous faire rappeler le premier nombre ´10 + 45, dans notre exemple : 15´10+45
> E2 : le 19 est le cinquième nombre, et il a déjà le 4 ajouté (19 = 15 + 4). Alors il reste juste le 5, mais comme on multiplie par 10, on met juste le 5 en arrière et c'est fini ».

Pour interpréter ce phénomène, on peut

- se pencher sur les actions possibles que les élèves peuvent mettre en œuvre pour obtenir le résultat dans la première étape (action sur des objets familiers avec des techniques disponibles)

-faire des hypothèses sur les méthodes auxquelles ces diverses actions sont susceptibles de conduire.

En d'autres mots, il s'agit de tenter de spécifier les différents milieux potentiels pour la validation.

Une méthode pouvant conduire à l'identification de l'invariant consiste à poser l'addition en colonne. En effet, si on le fait plusieurs fois, avec des nombres de deux chiffres par exemple, le calcul montre que :

- le résultat se termine toujours par 5,
- on a toujours une retenue de 4,
- la somme des « chiffres » des dizaines est égale au premier nombre de la liste,
- le dernier nombre écrit est égal au cinquième nombre de la liste, il est obtenu par l'ajout de 4 à ce premier nombre.
- le résultat final s'écrit donc en concaténant le 5ème nombre de la liste et le chiffre 5 écrit au début.

Cette manière de faire crée un milieu qui favorise a priori le transfert entre les deux méthodes. Cette méthode met en œuvre la dimension sémantique, les nombres entiers et la pratique de l'algorithme de l'addition sur ces nombres fournissant des rétroactions fiables que l'élève peut interpréter.

L'observation des résultats lorsque ceux-ci sont écrits au tableau après chaque jeu peut permettre une identification visuelle de l'invariant sur l'écriture des résultats mis en regard avec les nombres initiaux. Ceci relève de la dimension syntaxique.

Dans les mises en œuvre des adaptations de cette situation que je fais régulièrement en formation des enseignants, ou avec les étudiants de première année de licence, une autre méthode très rapide est fréquemment proposée.

Prendre la valeur médiane et la multiplier par 10, comme dans l'exemple ci-dessous :

- 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26
- 17- 18 - 19 - 20 - 21 - 21,5 - 22 - 23 - 24 - 25 - 26
- $21{,}5 \times 10 = 215$

Ceci peut se justifier par la compensation des écarts.

On rencontre aussi parfois la méthode dite de « Gauss », consistant à ajouter les nombres en colonnes après renversement de l'ordre des nombres comme ci-dessous.

17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17

qui conduit à la formule $(10 \times 43)/2$.

D'une manière générale, les élèves et les étudiants disposent de nombreuses méthodes de deux catégories distinctes :

- des méthodes mobilisant la numération décimale de position: poser l'opération en colonne, mise en œuvre de calcul réfléchi ; observation des formes écrites des résultats obtenus.

- une méthode consistant à décomposer les nombres avec le point de vue successeur.

Les méthodes appartenant à ces deux catégories peuvent faire apparaître la formule générale « 10 fois le premier nombre + 45 »

- des méthodes fondées sur la compensation des écarts : médiane, regroupements pouvant faire apparaître la formule : « ajouter le premier et le dernier terme et multiplier par 5 », ou à la manière de Gauss multiplier cette somme par 10 et diviser par 2.

Seules les méthodes de la deuxième et de la troisième catégories se généralisent à des séries comportant un nombre quelconque de nombres consécutifs (par exemple séries de 8 nombres consécutifs).

Choisir de commencer ou non avec des séries de 10 nombres consécutifs est ainsi une variable didactique essentielle de cette situation.

Bien qu'elle ait été initialement prévue pour le collège (élèves de 12-13 ans), on peut proposer cette situation à des publics très variés. Au cycle 3 de l'école primaire, soit dans le cadre du calcul réfléchi, soit sous la forme d'un problème de recherche pour dégager des règles générales, l'objectif n'étant pas d'introduire des lettres. La validation s'appuie sur les résultats de calcul normalement stabilisés à ce niveau. On peut utiliser la calculatrice comme moyen de contrôle ; cela permet de voir que c'est beaucoup moins rapide que le calcul mental.

Dans la mise en œuvre avec les élèves de telles situations de recherche, il faut considérer : des phases d'actions ; de formulation ; de débat et de validation ; avec des allers et retours entre les trois, avant une institutionnalisation. On peut également proposer cette situation au lycée ou en début d'université en relation avec le travail sur les suites arithmétiques pour travailler les relations entre équivalence syntaxique et équivalence sémantique. Elle a aussi été adaptée par Nicolas Pelay dans sa thèse pour une utilisation en contexte d'animation scientifique, nourrissant le développement du concept d'ingénierie didactique et ludique (Pelay, 2011).

Le jeu (défi) de la rapidité est ici un moteur de la situation qui permet l'engagement des élèves dans l'action, sous réserve que les valeurs choisies leur permettent de faire des calculs conduisant à des résultats auxquels ils peuvent se fier.

Cette situation peut également être utilisée en formation pour illustrer plusieurs points cruciaux en formation des enseignants, à savoir : l'importance des expériences faites par les sujets pendant la phase de la situation d'action dans l'évolution du milieu pour la validation ; le fait que la situation de formulation ne suffit pas toujours à elle seule à rendre compte des actions des sujets, puisque des actions diverses, mobilisant des connaissances différentes, peuvent conduire à des formulations identiques ; le fait que l'émergence d'une loi générale doit être confrontée à nouveau aux calculs effectifs (résultats de l'action) afin de pouvoir être validée par chacun des sujets.

Cette situation éclaire l'intérêt des notions de variables didactiques et de milieu de la théorie des situations didactiques pour penser et organiser les situations d'apprentissage et met en évidence l'importance des actions effectives sur des objets suffisamment familiers, jouant ainsi le rôle d'objets concrets au sens de Paul Langevin (1950), pour que les résultats de ces actions soient fiables pour le sujet et permettent de s'engager dans un débat sur la validation. Sa mise en œuvre en classe est relativement peu coûteuse, ce qui permet d'observer en situation le jeu entre syntaxe, sémantique et pragmatique, mettant en évidence le fait que la multiplication des expériences, en appui sur des objets familiers, des méthodes et des connaissances naturalisées pour le sujet, favorise l'élaboration de nouveaux objets conceptuels et de leurs propriétés, de résultats nouveaux et de leurs preuves.

5. Sur quelques apports de la prise en compte des relations entre abstraits et concrets pour éclairer le rôle des mathématiques dans les activités interdisciplinaires.

Dans cette partie, je me propose de montrer en appui sur quelques travaux la pertinence de la prise en compte des relations entre abstrait et concret dans les activités interdisciplinaires, pour lesquelles la question des rapports entre mathématiques et réalité (dans un sens large) se pose de manière cruciale.

Je présente brièvement trois exemples en physique et deux exemples en théorie des graphes.

5.1 Trois exemples en physique

Considérer la géométrie comme modélisation de l'espace sensible permet de proposer des activités interdisciplinaires permettant de travailler de manière articulée les concepts des différentes disciplines en jeu, notamment en Physique.

5.1.1 Une approche interdisciplinaire mathématiques-physique sur l'acquisition du concept d'angle par les élèves de cycle 3 (grades 3, 4, 5) (Munier & Merle, 2007).

La recherche s'inscrit dans un travail d'inter-didactique mathématique-physique conduit au sein du laboratoire LIRDEF[2] à Montpellier. Les auteures ont émis l'hypothèse qu'une approche interdisciplinaire, prenant racine dans l'espace sensible, pouvait permettre une meilleure appropriation du concept d'angle à l'école élémentaire. Elles ont élaboré une séquence d'enseignement basée sur une situation de physique (la réflexion de la lumière sur un miroir) qui privilégie la conception de l'angle en tant qu'angle de demi-droites et plus particulièrement inclinaison. Les auteures considèrent une double modélisation entre espace sensible (lieu des problèmes pratiques, des connaissances spatiales et du monde des objets) et espace physique (lieu des problèmes physiques mettant en jeu l'expérimentation, les lois physiques) d'une part, et ce dernier avec l'espace géométrique (problème de géométrie mettant en jeu la démonstration et les connaissances géométriques). Elles font l'hypothèse que l'introduction de l'espace physique permettra aux élèves de se créer un référent empirique qui les aidera à construire et contextualiser les concepts mathématiques visés. (op. cit. p. 354).

Au cours de cette séquence les élèves sont amenés, pour résoudre le problème posé, à expérimenter dans l'espace sensible, à modéliser la situation dans l'espace physique, puis dans l'espace géométrique. L'analyse de l'activité des élèves et des évaluations montre que les élèves ont acquis d'une part une certaine maîtrise du concept d'angle, ce qui était visé par la séquence mise en oeuvre et, d'autre part, des connaissances en physique.

5.1.2 Liens entre mouvements de translation et translation (Ba, 2007, Ba & Dorier, 2007)

L'objet du travail de thèse (Ba, 2007) est une étude épistémologique et didactique sur les liens entre mathématiques et physique à propos des concepts de vecteur et de translation d'une part et de grandeurs physiques vectorielles et de mouvement de translation d'autre part, en France et au Sénégal. L'auteur a notamment conduit une étude des rapports personnels des enseignants des deux disciplines et des élèves aux objets de savoir en jeu et aux liens éventuels entre les deux disciplines. Dans Ba & Dorier (2007) les auteurs posent la question : « Pourquoi le mouvement de translation a-t-il un lien avec la translation ? ». La question est pertinente dans la mesure où, à défaut d'un travail interdisciplinaire explicite, les élèves sont confrontés à deux concepts utilisant un même

[2] Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique, Éducation et Formation, https://lirdef.edu.umontpellier.fr/

vocable, sans pouvoir établir de lien entre les deux. Les auteurs montrent que pour s'engager dans un travail interdisciplinaire, et notamment un cours à deux voix visant à rendre manifeste ces liens pour les élèves, il est nécessaire de construire un discours qui distingue les champs de compétence, indispensable pour montrer la complémentarité.

5.1.3 Parabole et mouvement parabolique (projet IDENTITIES, Barelli et al. 2021)

Le texte présente un travail conduit dans le cadre du projet ERASMUS+ IDENTITIES[3]. Le thème retenu est très représentatif de ce qui se passe dans la transposition scolaire. Comme pour le mouvement de translation et la translation géométrique, les deux concepts sont intrinsèquement liés, ce qui en général n'est pas pris en compte dans les récits disciplinaires. Pourtant, comme les auteures le montrent, « la découverte du mouvement parabolique représente une étape cruciale dans la coévolution historique de la physique et des mathématiques, et dans l'établissement de la physique en tant que discipline. Il a permis de comprendre que les mathématiques peuvent s'appliquer au monde physique imparfait. D'autre part, Kepler et ses études en optique géométrique ont apporté une contribution fondamentale à la reconceptualisation de la parabole en tant que lieu géométrique. »[4]. Les auteurs ont développé et mis en œuvre une séquence d'enseignement interdisciplinaire visant à mettre en évidence pour les enseignants les identités disciplinaires respectives des mathématiques et de la physique. In fine, « différentes définitions de la parabole en tant qu'objet mathématique ont été données, en référence aux interactions entre les mathématiques et la physique au cours de nombreux siècles et au rôle de la symétrie comme objet frontière. »[5]

Dans chacun de ces trois exemples, les relations dialectiques entre les objets sensibles, les concepts physiques et les concepts mathématiques sont au cœur des réflexions épistémologiques et des élaborations didactiques des séquences interdisciplinaires d'enseignement proposées. Les auteurs proposent ainsi de croiser les regards des deux disciplines pour penser dans une perspective didactique les relations entre concret et abstrait qui sont en jeu dans les deux disciplines.

5.2 Deux exemples en théorie des graphes

5.2.1 Parcours eulériens dans les graphes (Cartier, 2008)

Dans ce texte, l'auteure traite un problème classique de théorie des graphes : la recherche de parcours eulériens, en appui sur la question bien connue des "ponts de Königsberg" que l'on rencontre autant dans l'enseignement qu'en vulgarisation des mathématiques. Une manière de traiter le problème est de faire une modélisation de ce problème concret sous forme d'un graphe, un objet relevant de la théorie des graphes, qui se situe à la frontière des mathématiques et de l'informatique. Lorsque l'on pose ce problème en classe, deux types de graphes apparaissent régulièrement, selon les choix qui sont faits pour les arêtes (ponts versus berges) et les sommets (berges *versus* ponts). L'auteure souligne que le travail de preuve que l'on peut entreprendre avec un tel sujet en classe au lycée n'est pas trivial et qu'il peut donner lieu à un travail mathématique conséquent en théorie des graphes. Un retour à l'article fondateur d'Euler montre que ce dernier n'a pas prouvé le théorème qu'il a proposé.

[3] IDENTITIES – Integrate Disciplines to Elaborate Novel Teaching approaches to InTerdisciplinarity and Innovate pre-service teacher Education for STEM challenges. https://identitiesproject.eu/fr/project/

[4] Ma traduction

[5] Ma traduction

5.2.2 Une situation didactique en cryptographie (Bartzia et al. 2021)

Dans le cadre du projet ERASMUS+ IDENTITIES déjà mentionné, les auteurs ont développé et implémenté une situation didactique relevant de la cryptographie à clé publique (asymétrique), fondée sur la notion d'ensemble dominant parfait[6] d'un graphe donné. Le problème de la détermination du PDS d'un graphe est un problème difficile (NP-complet).

Sur la base du problème PDS, on peut concevoir un crypto système qui exploite les deux faits suivants :

— étant donné un ensemble de sommets, on peut facilement construire un graphe ayant comme PDS cet ensemble de sommets.

— étant donné un graphe contenant un PDS, il est difficile de retrouver le PDS si l'on ne connaît que le graphe.

La situation didactique présenté dans l'article est organisée comme suit :

Étape 1 : Chiffrement - On présente le protocole et l'algorithme de chiffrement avec clé (publique) d'un graphe quelconque G, sans référence à l'existence d'un PDS (on n'en a pas besoin pour chiffrer un message).

Étape 2 : Cryptanalyse La classe est divisée en trois groupes. On donne aux groupes un message chiffré (le même) et on leur demande de le déchiffrer. Chaque groupe a des informations différentes à sa disposition pour résoudre le défi.

Des expérimentations en cours montrent que les étudiants travaillent sur le graphe comme *objet concret* (dessin) et mobilisent divers *concepts mathématiques et/ou informatiques* selon le type d'information disponible. Lorsqu'ils pensent avoir découvert le message, ils peuvent texter leur réponse en essayant d'ouvrir un « coffre ».

Ces deux exemples illustrent différents usages de la théorie des graphes mettant en valeur la dialectique entre abstrait et concret, le graphe lui-même pouvant être conçu comme un objet abstrait, dans le premier cas, et comme un objet concret dans le deuxième cas.

6. Conclusion

En février 2017, une artiste en résidence à l'université de Montpellier avait déposé dans le département une affiche sur laquelle elle avait écrit :

« Faut-il avoir confiance dans le réel pour tenter l'abstraction ? »

Cette question résonne pour moi avec ce que j'ai essayé de montrer dans ce texte, à savoir l'importance de la prise en compte d'une dialectique entre abstrait et concret tout au long du curriculum pour une appropriation adéquate des concepts mathématiques, cette dialectique pouvant être pensée en classe à l'intérieur des mathématiques, ou dans le cadre d'activités interdisciplinaires

6 Soit G un graphe (V, E) avec V ensemble des sommets et E ensemble des arêtes. Un ensemble dominant de G est un sous-ensemble de sommets S inclus dans V tel que tout sommet de V est inclus dans le voisinage d'un sommet de S. Il est parfait si et seulement si tout sommet de V est inclus dans exactement un voisinage d'un sommet de S.

BIBLIOGRAPHIE

BA, C. (2007). Étude épistémologique et didactique de l'utilisation du vecteur en mathématique et en physique. Liens entre mouvements de translation et translation mathématique. Thèse en cotutelle Université Cheikh Anta Diop (Sénégal) & Université Lyon 1 (France). https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00192241

BA, C. et DORIER, J-L. (2007). Liens entre mouvement de translation et translation mathématique. Repères-IREM, N°69. p. 81-93

BARALLOBRES, G. et GIROUX, J. (2008). Différents scénarios de situations d'une phase de validation collective*. Actes électroniques du colloque EMF 2006, Sherbrooke, 27-31 mai 2006.*

BARELLI, E. et al. (2021). Disciplinary identities in Interdisciplinary topics: Challenges and opportunities for teacher education. ESERA Proceedings.

BARTZIA, E-I. et al. (2021). Conception et organisation d'une situation didactique en cryptographie. *Actes du colloque DIDAPRO 2021*.

BERTHELOT, R. et SALIN, M.H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de l'université de Bordeaux.

BERTHOZ, A. (1997). *Le Sens du mou*vement, Éd. Odile Jacob.

BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

BROUSSEAU, G. (2002), Les grandeurs dans la scolarité obligatoire, in Jean-Luc Dorier, Michel Artaud, Michel Artigue, René Berthelot, Ruhal Floris (coordonné par), Actes de la XIe École d'Été de Didactique des Mathématiques, Corps (Isère) du 21 au 30 août 2001. 331-348. Grenoble : La pensée sauvage éditions.

CARTIER, L. (2008) A propos du théorème d'Euler et des parcours eulériens dans les graphes. *Petit x, 76*, 27-53.

CHEVALLARD, Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x, 19*. p. 45-75.

DIAS, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques: un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. (Doctorat). Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France.

DIAS, T. et DURAND-GUERRIER, V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM, 60*, 61/78.

DURAND-GUERRIER, V. (2018). Penser et organiser les articulations entre abstrait et concret dans l'apprentissage des mathématiques, de la maternelle à l'Université. J. Pilet, C. Vendeira (eds). *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. IREM de Paris – Université Paris Diderot.

ECO, U. (1980). Segno. Milan : A. Mondatori. *Le signe*, 1988 pour la traduction française. Bruxelles : Editions Labor.

GIUSTI, E. (2000). *La naissance des objets mathématiques*. E. Giusti, 1999 trad. par Georges Barthémely. éd° Ellipses coll. L'esprit des sciences.

GONSETH, F. (1936). *Les mathématiques et la réalité – Essai sur la méthode axiomatique*. Alcan, Paris (1936) et Blanchard, Paris (1974).

LANGEVIN, P (1950). *La pensée et l'action*, textes recueillis et présentés par Paul Larenne, préfaces de Frédéric Joliot-Curie et Georges Cogniot. Paris, Les Éditeurs Français Réunis.

LONGO, G. (1997). Géométrie, Mouvement, Espace: Cognition et mathématiques. Intellectica, 1997/2, pp.195-218, MORRIS, C. (1938). *Foundations of the theory of signs*, Chicago ; Chicago University Press.

MUNIER, V., & MERLE, H. (2007). Une approche interdisciplinaire mathématiques – physique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 27(3),* 349–388.

NICOD, J. (1924). *La géométrie dans le monde sensible*. Réédition PUF, 1972, pp. 24-26.

PELAY, N. (2011) *Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

SINACEUR, H. (1991) La dialectique de l'espace selon Ferdinand Gonseth, in IREM de Lyon (ed.) La figure et l'Espace. *Actes du 8ème colloque Inter-Irem Histoire et épistémologie des mathématiques*, 187-206.

VERGNAUD, G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des mathématiques, vol.10/2-3*, 133-169.

État des lieux de la didactique des mathématiques en Tunisie

Imed KILANI & Rahim KOUKI
Université Virtuelle de Tunis ISEFC
Université de Tunis el Manar– IPEIM

RESUME

Comme partout ailleurs, le passage de l'éducation élitiste à l'éducation de masse au cours de la 2ème moitié du 20ème siècle, a conduit les acteurs de la scène éducative tunisienne et notamment les mathématiciens à se poser des questionnements relatifs à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. A partir des années soixante-dix, l'ATSM[1] a commencé à s'intéresser, en participant de manière fréquente aux conférences internationales sur l'enseignement des mathématiques,à une nouvelle science qui s'appelait la *didactique des mathématiques*. C'est ainsi, qu'une dynamique a vue le jour et s'est développée, peu à peu, en Tunisie, pour aboutir, en 1998, à la mise en place d'un DEA en didactique des mathématiques à l'ISEFC[2]. Vingt-quatre ans passés depuis cette date. Nous pensons qu'il est, alors, important de faire le point sur les réalisations faites depuis le lancement de la première promotion et de pointer les manquements et les difficultés qui ont accompagnés ce développement. C'est ainsi que nous exposons, dans ce papier, les conditions dans lesquels la formation s'est lancée et comment a t-elle évoluée à travers les années. Nous décrivons aussi, les spécificités des recherches menées par les étudiants et chercheurs tunisiens (un regard particulier sera donné à la dimension interdisciplinaire dans ces recherches), le statut professionnel actuel des diplômés en didactique des mathématiques et le rayonnement des didacticiens des mathématiques dans les espaces national et international. Bien évidemment, nous pointons tout au long de cet article certaines de nos préoccupations par rapport à la survie de cette discipline en Tunisie.

Dans cet article nous nous appuyons, particulièrement, sur Chellougui & Durand-Guerrier (2016), Abdeljaouad (2009) et Durand-Guerrier & Ben Kilani (2005).

Pour comprendre l'évolution de l'enseignement de la didactique des mathématiques en Tunisie et présenter l'état des lieux de cette discipline aujourd'hui, nous pensons qu'il est important de commencer par décrire, même succinctement, le contexte historique qui a préparé au lancement de cette formation universitaire.

1. CONTEXTE HISTORIQUE

L'ATSM est la première association en Afrique et dans le monde arabe qui a regroupé les enseignants de mathématiques. Elle a été créée en 1968 pour contribuer à l'amélioration de l'enseignement des mathématiques et à la diffusion de la culture scientifique en Tunisie. Cette association a joué un rôle central dans la diffusion de la culture didactique auprès des acteurs de la scène éducative. Depuis sa création, elle a tenu à être présente dans des événements scientifiques d'envergures internationales s'intéressant à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Ainsi, beaucoup d'enseignants et inspecteurs de mathématiques se sont imbibés de la didactique des mathématiques suite à leurs participations récurrentes aux Conférences Internationales sur l'Enseignement des Mathématiques comme celle de Lyon qui a eu lieu en 1972, aux journées nationales des Associations de Professeurs de Mathématiques en France, en Belgique ou en Suisse. Elle a organisé, depuis sa création, de multiples Journées Nationales d'études sur l'enseignement des mathématiques ainsi que beaucoup d'écoles d'été autour de différents thèmes se rapportant sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

---

[1]Association Tunisienne des Sciences Mathématiques.
[2] Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue.

En 1977, l'ATSM et l'ENS[3] de Tunis ont accueilli Guy Brousseau comme invité d'honneur pour présenter la didactique des mathématiques à un large public d'enseignants. Ces journées ont marqué beaucoup d'acteurs de la scène éducative tunisienne qui ont découvert ce champ de savoir pour la première fois.

Il faut remarquer aussi que durant toutes ces années et jusqu'à aujourd'hui d'ailleurs, l'ATSM a offert, aux enseignants et chercheurs tunisiens, un espace de publication d'articles sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans sa revue Miftah al-hissab.

En parallèle et à la fin des années soixante-dix, considérant la didactique des mathématiques importante dans la formation des futurs enseignants, un certains nombres d'enseignants universitaires de mathématiques, exerçant à l'ENS de Tunis[4], ont fait la promotion de cette discipline afin de l'intégrer dans le cursus de formation des étudiants[5] (Abdeljaouad, 2009). L'enseignement de la didactique des mathématiques s'est poursuivi dans l'ENS de Bizerte mais il s'est, malheureusement, arrêté quelques années plus tard, après la transformation de l'école, en 1990, en Faculté des Sciences de Bizerte.

En 1982, l'ISEFC a été créé. Cette institution, qui est rattachée aujourd'hui à l'Université Virtuelle de Tunis, a été fondée pour assurer principalement la formation continue, dans le cadre des maîtrises d'enseignement (mathématiques, physique-chimie, Sciences de la Vie et de la Terre, Informatique, Arabe, Français, Histoire-Géographi etc.), des enseignants du primaire et du secondaire rattachés au ministère de l'Education Nationale. Au fil des années et selon les besoins du ministère de l'Education, l'ISEFC a multiplié ses prestations de service. Il a assuré, durant des années, la préparation des inspecteurs du secondaire et du primaire aux concours de recrutement, la formation des techniciens de laboratoire de l'enseignement supérieur et secondaire, la préparation au CAPES etc.

De part ses missions éducatives, l'ISEFC est devenu un lieu de rencontre de beaucoup de relais d'opinion de la scène éducative et notamment ceux qui militent pour un meilleur enseignement/apprentissage des mathématiques. Les rapprochements qui existent entre les objectifs de l'ATSM et ceux de l'ISEFC ont conduit, naturellement, l'ATSM à installer son bureau principal dans les locaux de l'ISEFC. Ces rapprochements physiques et l'implication forte des responsables à la fois de l'ISEFC et de l'ATSM ont créé une dynamique de reflexion sur la nécessité de compléter la formation académique des enseignants par une formation en didactique des disciplines et notamment des mathématiques[6].

Sous l'impulsion particulière des professeurs Malika Trabelsi Ayadi (Directrice de l'ISEFC, 1997-2004), de Samir Marzouki (Directeur de l'ISEFC, 1994-1997) et de Mahdi Abdeljaoud (Directeur de l'ISEFC, 1987-1994), de Ahmed Chabchoub (Président ATURED [7]) etc, un

[3] Ecole Normale Supérieur de Tunis.

[4] L'Ecole normale supérieure de Tunis est la plus ancienne institution universitaire moderne de la Tunisie. Elle a ouvert ses portes en octobre 1956, la même année où la Tunisie prend son indépendance. Elle avait pour mission d'assurer la formation d'enseignants de haut niveau dont le pays avait un si grand besoin. En 1982, cette école s'est scindée en deux institutions (l'une s'est spécialisée dans les domaines des lettres et des sciences humaines portant le nom d'Ecole Normale Supérieure de Sousse et l'autre s'est spécialisée dans les domaines scientifiques portant le nom d'Ecole Normale Supérieure de Bizerte).

[5] Les professeurs Claude Tisseron et Pierre-Edouard Gauthier ont bien contribué, à cette époque, dans la mise en place d'un cours de didactique des mathématiques à l'ENS.

[6] Il faut noter tout de même que des associations non mathématiques (Association Tunisienne pour la Pédagogie du Français (ATPF), Association Tunisienne de Recherches Didactiques (ATURED), Association Tunisienne de Linguistique, Amicale des anciens étudiants de l'ISEFC etc.) et des acteurs de la scène éducative tunisienne en général ont fortement contribué à cette dynamique de réflexion sur la nécessite de former les enseignants dans les didactiques des disciplines.

[7] Association Tunisienne de Recherche Didactique.

concours national s'est tenu, en 1993, pour sélectionner, entre autres, trois candidats [8] qui poursuivront leurs études (Diplôme des Etudes Approfondies - DEA et Doctorales) en didactique des mathématiques en France. Cette dynamique s'est poursuivie à l'ISEFC qui a lancé au sein de ses locaux et pour la première fois des études au niveau du DEA en didactique des différentes disciplines. L'année universitaire 1998-1999 a été marqué par le lancement du DEA en didactique des mathématiques [9] . Aujourd'hui, l'ISEFC est doté d'une école doctorale " Didactiques, Sciences de l'Enseignement, Métiers de l'Education et de la Formation " (DISEMEF) qui a été instituée en 2003 pour fédérer les études doctorales en Didactiques des disciplines et en Sciences de l'éducation.

2. LANCEMENT ET EVOLUTION DE LA FORMATION

Pour pouvoir assurer une bonne formation de DEA en didactique des mathématiques, l'ISEFC a multiplié les projets de partenariats avec les laboratoires de recherche français qui travaillent dans le champ de la didactique des mathématiques. Il s'agit des laboratoires : LIRDHIST (Université Lyon1) ; LEIBNIZ (Université Grenoble 1) ; LACES (Université de Bordeaux) et DIDIREM (Université Paris 7).

Il faut noter que l'Institut Français de Tunisie (IFT) a joué un rôle important dans la mise en place de ces différentes collaborations. Il a financé, des missions pour des enseignants français afin qu'ils puissent intervenir, en Tunisie, dans le DEA. Il a aussi financé des stages de recherche, pour les étudiants tunisiens, dans les laboratoires partenaires français. L'IFT a également enrichi la la bibliothèque de l'ISEFC en lui faisant acquérir un important fond documentaire sur la didactique des disciplines.

Abdeljaouad[10] (2009) a précisé que la sélection des premiers candidats n'était pas chose facile car il fallait, en choisissant les futurs étudiants, prendre en considération des éléments extra-académiques en plus des critères stricts relatifs au dossier académique du candidat lui-même. En effet, comme il n'y avait pas suffisamment de visibilité par rapport à la destinée des futurs diplômés en didactique des mathématiques à cause de l'incertitude relative à leur employabilité après la formation, le jury a préféré, en examinant les dossiers des candidats, ne retenir que ceux qui sont déjà des enseignants titulaires de leur poste dans l'éducation nationale. Concernant les critères académiques, le jury a décidé de ne retenir, pour l'entretien oral, que les candidats qui ont eu leur maîtrise en mathématiques en cinq ans au plus avec au moins une mention assez bien. La maîtrise de la langue française était un critère important de sélection des candidats lors de l'entretien oral. Ce critère est justifié du fait que les enseignements sont dispensés dans la langue de Molière et que les étudiants sont appelés à rédiger leur mémoire de DEA en français. La première promotion (1998-1999) comptait dix étudiants choisis parmi soixante-trois candidats.

Les enseignants qui sont intervenus, les premières années, dans le DEA de didactique des mathématiques sont tunisiens et français. Les tunisiens ne sont pas bien sûr des diplômés en didactique des mathématiques. Ils sont, principalement, des enseignants universitaires de mathématiques, qui ont des affinités par rapport aux questions relatives à l'enseignement et

[8] Il s'agit de Hanène Abrougui, de Mondher Tangour et de Mohamed Essahbi El Amriqui ont obtenu leur thèse de doctorat successivement de l'Université Joseph Fourier-Grenoble en 1998, de l'Université de Bourgogne en 1999 et de l'Université Claude Bernard-Lyon en 2001.

[9] Encore une fois, les professeurs Malika Trabelsi Ayadi,Mahdi Abdeljaoud et Ahmed Chabchoub ont fortement contribué dans la mise en place de cette formation. Il faut noter aussi le rôle considérable qu'a joué, à cette époque là, Claude Tisseron directeur du LIRDIST-Lyon1 (Laboratoire interdisciplinaire de recherche en didactique des sciences et techniques) dans la mise en place de la formation et dans l'encadrement de certains étudiants.

[10] Mahdi Abdeljaouad était l'un des membres du jury de selection des candidats.

l'apprentissage des mathématiques, ou des sciences de l'éducation[11] . Quant aux enseignants français, ils sont membres dans les laboratoires de recherche partenaires avec l'ISEFC. Ils sont experts en didactique des mathématiques[12]. Actuellement, la formation est assurée dans le cadre du mastère, exclusivement, par des tunisiens. La majorité d'entre eux sont des docteur(e)s en didactiques des mathématiques[13]. Les autres sont des docteurs en sciences de l'éducation[14] ou en histoire des mathématiques[15].

Dans le cadre du DEA, la formation en didactique des mathématiques se déroulait sur deux années. La première année était organisée en deux semestres consacrés exclusivement aux enseignements. Quant à la deuxième, elle était consacrée entièrement à la rédaction du mémoire de recherche et à la soutenance orale. Dans ce qui suit nous présentons l'organisation générale de la première année :

- Semestre 1: Au cours de ce semestre les étudiants recevaient une formation commune à toutes les didactiques. En plus du français, de l'anglais et d'une initiation en informatique, les étudiants suivaient des cours en théories de l'apprentissage, en théories de l'évaluation et en méthodologies des sciences de l'éducation. Ces cours étaient assurés par des enseignants tunisiens spécialistes dans le domaine des sciences de l'éducation.
- Semestre 2: Au cours de ce semestre les étudiants recevaient un enseignement spécialisé en didactique des mathématiques. Il s'agit de cinq modules [16] : Textes fondamentaux en didactique des mathématiques, Applications des concepts didactiques à l'enseignement des mathématiques, Initiation à la recherche en didactique des mathématiques, Histoire et épistémologie des mathématiques, Evaluation en didactique des mathématiques et nouvelles technologies. Ces modules étaient assurés par des enseignants français dans le cadre de la coopération entre l'ISEFC et des laboratoires français de recherche en didactique. En moyenne, chaque module était enseigné en trente heures regroupées en une seule semaine. Les étudiants devraient alors bien s'organiser pour pouvoir se libérer complètement de leurs engagements professionnels et poursuivre ces enseignements. Cette contrainte conduisait certains étudiants à abandonner la formation.

En septembre 2006, le DEA de didactique des mathématiques s'est transformé en Mastère[17]. Depuis, quatre habilitations ont vu le jour jusqu'à aujourd'hui. Dans la première habilitation la formation était regroupée en trois semestres. Les modules qui se faisait auparavant dans le cadre du DEA en deux semestres sont regroupés en un seul semestre. Le deuxième et le troisième semestres étaient dédiés à un séminaire de méthodologie de recherche et à la rédaction du mémoire. Une nouvelle organisation a été fixée par la deuxième habilitation qui est entrée en vigueur à la rentrée 2010. Elle organisait la formation en quatre semestres. Le premier et le deuxième étaient consacrés à l'enseignement de seize modules. Le troisième semestre était réservé aux séminaires d'initiation à la méthodologie de la recherche et le dernier semestre était dédié à la rédaction et la soutenance du mémoire.

---

[11] Il s'agit des professeur(e)s Mahdi Abdeljaouad, Hikma Smida, Faouzi Chaabane, Karim Boulabiar,Hanène Abrougui Hattab (1ère docteure en didactique des mathématiques), Marouan Ben Miled (historien des mathématiques), Ahmed Chabchoub, Noureddine Sassi et Mohamed Ben Fatma.

[12] Il s'agit des professeur(e)s Claude Tisseron, Colette Laborde, Gérard Vergnaud, Sylvette Maury, Nicolas Balacheff, Viviane Durand-Guerrier, Isabelle Bloch, Brigitte Grugeon et Hamid Chaachoua.

[13]Il s'agit des professeur(e)s Faïza Chellougui, Imen Ghedamsi, Rahim Kouki,, Sonia Ben Nejma, Faten Khalloufi , Imed Kilani , Sassi Haddad , Mounir Dhiab etc.

[14]Abdelmajid Naceur, Najoua Ghriss.

[15]Marouan Ben Miled.

[16] Il faut noter que les frontières entre les différents modules enseignés au second semestre n'étaient pas bien délimitées. Ceci pouvait s'expliquer par le manque de clarté de ce qui était demandé d'enseigner. D'ailleurs les intitulés, même, des cours portait à confusion.

[17]Le master s'inscrit dans le cadre de la réforme LMD (Licence-Master-Doctorat) conduite par la Tunisie.

Concernant les modules enseignés au premier et au deuxième semestres, ils étaient regroupés selon quatre axes comme précisés par Chellougui & Durand-Guerrier (2016) :

- Axe 1 : Didactique des mathématiques ;
- Axe 2 : *Mathématiques fondamentales* pour approfondir certaines connaissances mathématiques[18] ;
- Axe 3: Pédagogie classique et numérique ;
- Axe 4 : Méthodologie de recherche.

Même s'il y a quelques différences au niveau des modules enseignés, la troisième et la quatrième habilitation[19] sont organisées de la même manière[20] : les enseignements s'étalent sur les trois premiers semestres de la formation[21]. A la fin de chaque semestre les étudiants passent des examens. Le quatrième semestre est réservé à la rédaction et la soutenance du mémoire de recherche.

3. VINGT-QUATRE ANNEES DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Depuis le lancement, à l'ISEFC, de la première promotion de didacticiens des mathématiques jusqu'à aujourd'hui vingt-quatre années se sont déjà écoulées. Au total, deux cent quatorze étudiants ont été formés. Cinquante-huit mémoires de DEA et Mastères et vingt thèses de doctorat (la quasi-totalité des thèses sont réalisées en cotutelle avec des universités françaises) sont soutenus. Deux thèses sont réalisées dans le cadre de la coopération par deux étudiantes étrangères (une algérienne et une palestinienne). Actuellement, douze thèses (certaines sont exclusivement tunisiennes et les autres sont en cotutelle) sont en cours de réalisation dont deux sont préparées par des étudiantes étrangères dans le cadre de la coopération. Dans le tableau ci-dessous, nous présentons les pourcentages des diplômés DEA/Mastère/Doctorat par rapport au nombre total des inscrits et ceci depuis le lancement de la formation en 1998. Nous présentons également, dans ce tableau, le pourcentage des docteurs par rapport au nombre de diplômés DEA/Mastère.

Pourcentage des diplômés DEA/Mastère relativement au nombre des inscrits	Pourcentage des Docteurs relativement au nombre des inscrits	Pourcentage des Docteurs relativement au nombre de diplômés DEA/Master
27%	9%	35%

Tableau 1. *Bilan global de la formation en didactique des mathématiques en Tunisie*

Nous remarquons que seulement 27% des étudiants ont réussi les examens et ont pu soutenir leur mémoire de recherche. Les autres ont ou bien abandonné au cours de la formation ou bien ils ont échoué les examens ou tout simplement ont eu des difficultés à réaliser leur mémoire.
Le pourcentage des docteurs par rapport au nombre total des inscrits dans l'un des cursus DEA ou Mastères de didactique des mathématiques est de l'ordre 9%. Il faut noter l'enregistrement d'une diminution du nombre de doctorats soutenus ces dernières années. Ce phénomène semble être généralisé dans beaucoup de spécialités. Il peut s'expliquer par le manque de visibilité et l'incertitude relative à l'employabilité des docteurs après la formation surtout que le nombre de postes d'enseignants-chercheurs ouverts dans l'enseignement supérieur tunisien est en

[18]Cet axe était jugé important par certains enseignants universitaires de mathématiques. Il ne le retrouve plus dans les habilitations suivantes.

[19]La quatrième habilitation prend fin l'année universitaire 2022-2023.

[20] La troisième habilitation intégrée quelques modules faisant référence à des théories didactiques anglophones.

[21]Chellougui et Durand-Guerrier (2016) précisent que : «*Tout au long des trois premiers semestres, les étudiants sont sollicités pour élaborer des projets personnels dans toutes les unités d'enseignement, sous la direction du professeur en charge de l'unité en question*.» (p46)

continuelle diminution. Malgré cette situation difficile 35% des étudiants diplômés en DEA/Mastère de didactique des mathématiques ont pu continuer leur formation et ont obtenu le diplôme de docteur en didactique des mathématiques. Il faut noter ici que ce pourcentage assez élevé émane surtout des étudiants des premières promotions qui étaient très motivés et bien encadrés[22]. Il faut préciser aussi que trois docteurs, en didactique des mathématiques, parmi les vingt ont réussi à avoir leur Habilitation à Diriger des Recherches (HDR).

3.1 Les DEA/Mastères/Doctorats selon les niveaux d'enseignement

En Tunisie, l'enseignement est obligatoire jusqu'à l'âge de 16 ans et l'élève ne peut être exclu définitivement de tous les établissements scolaires publics que dans des cas extrêmes et pour faute très grave. Le système éducatif tunisien est globalement organisé selon cinq niveaux :

- Enseignement maternel non obligatoire (de 3 à 6 ans);
- Enseignement de base du premier cycle, d'une durée de six ans, dispensé dans les écoles primaires ;
- Enseignement de base du second cycle, d'une durée de trois ans, dispensé dans les collèges ;
- Enseignement secondaire, d'une durée de quatre ans, dispensé dans les lycées et couronné par le diplôme du baccalauréat. La première année est un tronc commun et les trois années qui suivent se déroulent dans l'une des six filières suivantes : *lettres*, *mathématiques*, *sciences expérimentales*, *économie et gestion* et *informatique*.
- Enseignement universitaire qui est dicté par le système LMD (Licence-Mastère-Doctorat) pour toutes les formations à l'exception des filières de l'ingénierie, de la médecine et de l'architecture.

Les transitions primaire/collège, collège/lycée et lycée/université marquent souvent des ruptures notamment dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Par exemple, le passage du primaire au collège est caractérisé par des changements de codes dans l'écriture mathématiques et par la nécessité de passer d'une logique inductive à une logique déductive. La transition du collège au lycée s'accompagne par le passage de l'arabe au français dans l'enseignement des mathématiques. Certaines recherches (Durand-Guerrier & Ben Kilani, 2004 ; Ben Kilani, 2005 ; Ben Nejma, 2020) ont montré que ce passage marque une difficulté supplémentaire pour les élèves tunisiens dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Le tableau ci-dessous fourni une idée sur la répartition des mémoires et thèses soutenus selon les niveaux d'enseignement.

	Primaire	**Transition primaire / collège**	**Collège**	**Transition collège/lycée**	**Lycée**	**Transition lycée / université**	**Université**
DEA/Mastères	5	4	12	3	29	3	2
Thèses	1	0	1	2	9	2	5

Tableau 2. *Répartition des mémoires et thèses selon les niveaux d'enseignement*

Nous remarquons qu'environ la moitié des thématiques des mémoires et des thèses soutenus se sont développées au niveau du Lycée. Ceci pourrait s'expliquer par le fait que la majorité des étudiants et des doctorants sont des enseignants qui exercent au lycée et qui ont un certain regard critique par rapport aux programmes et manuels scolaires ainsi que par rapport à ce qui se pratique dans les classes de mathématiques.

[22]Nous ne discutons pas, ici, les raisons de leur motivation et de la qualité de leur encadrement.

Bien que le passage d'un niveau d'enseignement à un autre (primaire/collège, collège/lycée et lycée/université) posent problèmes pour beaucoup d'apprenants, nous remarquons qu'il y a peu de travaux de recherche réalisés qui se sont intéressées à l'étude des difficultés qui pourraient apparaître lors de ces transitions.

Nous pouvons noter aussi le peu de recherches menées sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au niveau des cycles maternel et primaire. Ceci pourrait s'expliquer, selon nous, par la méconnaissance des étudiants et doctorants des contenus d'enseignement à ces deux niveaux d'enseignement puisqu'ils exercent majoritairement au collège et au lycée.

Les mémoires et les thèses réalisés au niveau du supérieur sont conçus par des enseignants qui étaient à l'époque en détachement de l'enseignement secondaire à l'enseignement supérieur. Ils enseignaient les mathématiques car l'université tunisienne manquait, dans le temps, de docteurs en mathématiques. Cette situation n'est plus possible du moment qu'aujourd'hui il y a une profusion d'enseignants docteurs en mathématiques.

3.2 Les DEA/Mastères/Doctorats selon les champs mathématiques

Les recherches menées, en Tunisie, en didactique des mathématiques se sont inscrits dans plusieurs champs mathématiques : logique, langage et raisonnements mathématiques(1), arithmétique (2), numérique (3), algèbre (4), analyse (5), géométrie (6), statistiques et probabilités (7) et Théorie des graphes (8). Le tableau suivant précise la répartition de ces recherches selon les champs mathématiques investigués[23].

	Champ (1)	Champ (2)	Champ (3)	Cham p (4)	Champ (5)	Cham p (6)	Champ (7)	Cham p (8)
DEA/Mastères	3	4	8	10	10	17	5	1
Thèses	3	1	0	6	6	3	1	0

Tableau 3. *Répartition des mémoires et thèses selon les champs mathématiques*

Les champs mathématiques les plus explorés dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques, en Tunisie, sont ceux de la géométrie, de l'algèbre et de l'analyse. Nous pouvons remarquer aussi que le champ du numérique qui était assez présent dans les travaux de DEA/Masters a totalement disparu dans les travaux de thèses. On peut se demander pourquoi il n'y a pas eu de continuité dans les projets de thèses relatives à ce même champ mathématique. Pourtant, beaucoup de travaux de thèse sur le numérique ont été réalisé et ont montré leur pertinence didactique (Farias (2010), Larguier (2009), Bronner (2007,1997) etc.).

3.3 La dimension interdisciplinaire dans les recherches didactiques tunisiennes

Beaucoup de concepts mathématiques semblent propres à la discipline « mathématiques ». Or, ceci n'est qu'une illusion. En réalité, ces concepts sont souvent mobilisés dans d'autres disciplines comme la physique, l'informatique, la géographie, l'économie etc. Mieke (2002) appelle ce type de concepts « travelling concepts » et souligne qu'en voyageant d'une discipline à une autre, le sens de ces concepts pourrait se modifier. Elle ajoute que, pour éviter notamment chez les élèves, les difficultés liées au sens d'un concept nomade, il est intéressant, voir fondamental, de l'étudier dans une approche d'interdisciplinarité. Selon Klein (1998) et Erickson (1996), l'interdisciplinarité favorise le développement des habiletés cognitives supérieures comme la pensée critique, l'esprit de synthèse et d'intégration, et la compréhension des concepts difficiles.

[23]Bien évidement les recherches peuvent se retrouver aux carrefour de plusieurs champs mathématiques. Nous les classons selon le champ mathématique dominant enquis.

Mais ce terme *interdisciplinarité* mérite d'être précisé car il est, en fait, *polysémique* comme le souligne Lenoir (2020). Après avoir différencier entre la monodisciplinarité ou unidisciplinarité, la multidisciplinarité, l'intradisciplinarité et la pluridisciplinarité, Lenoir (2020) précise les significations au «sens large» et au «sens strict» de l'interdisciplinarité :

> - L'interdisciplinarité, au sens large, est généralement utilisée comme expression générique pour désigner toutes les formes de liens qui peuvent se dessiner entre les disciplines. Le recours au terme polydisciplinarité serait sans doute plus heureux.
>
> - L'interdisciplinarité, au sens strict, désigne les interactions effectives tissées entre deux ou plusieurs disciplines portant sur leurs concepts, leurs démarches méthodologiques, leurs techniques, etc. Elle n'est donc pas compatible avec une perspective cumulative, quelle qu'elle soit, car elle impose des interactions réelles. (Lenoir, 2020, p. 7)

Sans rentrée dans une polémique autour du sens de l'interdisciplinarité, nous adoptons, ici, la définition « simple » de Maingain et al (2002). Pour eux, l'interdisciplinarité consiste en « *la mise en relation d'au moins deux disciplines, en vue d'élaborer une représentation originale d'une notion, d'une situation, d'une problématique* ».

En fouillant les travaux de recherche réalisés par les didacticiens des mathématiques tunisiens, nous réalisons que peu de recherches, ce sont inscrites dans une approche interdisciplinaire. En effet, parmi les cinquante-huit DEA/Masters soutenus, deux DEA et un master ont développé une problématique d'interdisciplinarité. Il s'agit :

- du mémoire de DEA de Ben Kilani (2001) dans lequel il a étudié « *Les conceptions des élèves de la 6ème année de l'enseignement secondaire tunisien à propos de la négation des énoncés quantifiés*». Ce travail est au carrefour de trois disciplines : les mathématiques, la logique et la langue française.

- du mémoire de DEA de Kouki (2004) dans lequel il a proposé « La logique des prédicats comme cadre d'analyses didactiques des équations et des inéquations » qui est un travail articulant les mathématiques et la logique philosophique.

- du mémoire de master de Abdel Aziz (2022). Ce mémoire s'intitule *Modélisation via les équations du second degré entre mathématiques et physique dans l'enseignement tunisien*. Comme l'indique le titre, ce travail met en relation les mathématiques et la physique.

Parmi les vingt thèses soutenues seulement trois thèses se sont aussi inscrites dans une problématique d'interdisciplinarité. Il s'agit :

- de la thèse de Ben Kilani (2005) qui s'inscrit dans la continuité de son mémoire de DEA en intégrant, en plus, une quatrième discipline, à savoir la langue arabe, pour étudier le fonctionnement de la négation des énoncés quantifiés dans cette langue maternelle pour les tunisiens.

- de la thèse de Haj Ali (2005) qui porte le titre *Quelles mathématiques enseigner dans une école supérieure d'économie ? Une étude de cas en Tunisie*. Dans cette thèse, l'auteure s'est posée une vraie question d'interdisciplinarité, dans une école de commerce, concernant les interactions de certains concepts mathématiques avec les concepts d'économie.

- de la thèse de Kouki (2008) qui a élargi ses investigations didactiques sur les fonctions mathématiques enseignées au secondaire en prenant en considération les aspects logiques et plus précisément les dimensions sémantique et syntaxique dans la modélisation et la résolution des problèmes faisant appel aux objets mathématiques et para-mathématiques d'équations, inéquations et fonctions.

Il faut noter qu'actuellement deux thèses en cours de réalisation traitent de l'interdisciplinarité. L'une entre mathématiques et physique et l'autre entre les mathématiques et la gestion. Ajoutant à ces deux thèses, un master, lui aussi, est en cours de réalisation et traite une problématique d'interdisciplinarité entre mathématiques et informatique.

Du côté des didacticiens de l'informatique, deux masters en cours de réalisation sont dans une approche interdisciplinaire : l'un entre les mathématiques et l'algorithmique et l'autre entre les mathématiques et la Programmation Orientée Objet.

Les publications des didacticiens tunisiens dans les revues internationales qui s'inscrivent dans une approche d'interdisciplinarité ne sont pas nombreuses (cinq parmi une quarantaine).

Le peu de recherche en didactique des mathématiques s'inscrivant dans une approche interdisciplinaire montre la nécessité d'ouvrir, en Tunisie, un nouveau champ de recherche en didactique des mathématiques qui étudiera des notions mathématiques sous l'angle de l'interdisciplinarité.

3.4 Statut professionnel actuel des diplômés en didactique des mathématiques

A la date de septembre 2022, vingt doctorants en didactique des mathématiques ont obtenu leur diplôme et trente huit étudiants (y compris les doctorants qui ne sont pas encore diplômés) possèdent leur diplôme de DEA ou de Mastère. Dans le tableau suivant, nous précisons leur statut professionnel actuel. Il faut noter qu'à part cinq étudiants qui étaient des inspecteurs et un conseillé pédagogique, la quasi totalité des étudiants étaient, au début de leur formation, des Professeur de l'Enseignement Secondaire (PES) ou Primaire (PEP).

Statut professionnel	DEA/Mastère/Doctorant	Docteurs
Professeur de l'enseignement supérieur	0	3
Maître de conférences	0	6
Maîtres de conférences retraités	0	3
Inspecteur	5	1
Inspecteur retraité	0	1
Conseiller pédagogique	1	0
PES/PEP	28	1
Retraité PES/PEP	2	4
Contractuel	1	1
Sans emploi	1	0

***Tableau 4**. Statut professionnel actuel des diplômés en didactique des mathématiques*

Nous remarquons que la majorité des diplômés[24] DEA/Mastère/Doctorant n'ont pas changé de statut professionnel. Par exemple, ceux qui ont entamé leur formation en étant des Professeurs de l'Enseignement Secondaire (PES) ou Primaire (PEP) ont gardé leur statut. Il faut noter que beaucoup d'étudiants des premières promotions ont pu, en passant le concours d'assistanat, intégrer l'enseignement supérieur en passant par le détachement dans le supérieur et en ayant le DEA avec uniquement un rapport d'avancement dans la thèse. Cette opportunité, qui n'existe plus aujourd'hui, a encouragé ces doctorants à terminer leur thèse et obtenir leur diplôme de docteur en didactiques des mathématiques. Actuellement et depuis quelques années, la situation des docteurs tunisiens, toutes disciplines confondues, est devenue difficile. En effet, le nombre des docteurs en chômage ne cesse de croître faute de postes ouverts à l'université.

Il faut souligner que les douze docteurs qui sont aujourd'hui Professeurs de l'enseignement supérieur, Maître de conférences ou Maître de conférences retraités ont obtenu leur thèse avant

[24]Il s'agit des diplômés des promotions des années 2006, 2007,..., 2022. -

2013. Les huit autres docteurs qui n'ont pas encore intégré l'enseignement supérieur ont obtenu leur thèse après 2013. Depuis cette date, l'ouverture de postes d'enseignants à l'université est devenue très rare surtout que l'étape intermédiaire du détachement de l'enseignement secondaire à l'enseignement supérieur, qui a facilité aux docteurs d'avant 2013 l'accès à l'enseignement supérieur, n'est plus possible. Dans la *typologie des motivations des candidats* qui se présentent pour poursuivre leurs études dans le master de didactique des mathématiques, Abdeljaouad (2009) note deux motivations concernant le désir des candidats à quitter l'enseignement secondaire et intégrer celui du supérieur :

> •difficultés dans l'enseignement secondaire: Quitter l'enseignement secondaire qui devient difficile, en raison du nouveau comportement des élèves. Les élèves ont un comportement inadmissible. Abandonner la craie et le tableau pour me consacrer à des tâches plus nobles. Ces motivations sont rarement explicitées, elles apparaissent en filigrane pendant l'entretien ;
>
> ...
>
> •Souhait d'une promotion sociale: Avoir un nouveau diplôme et enseigner à l'Université. (Abdeljaouad, 2009, p. 4)

Il faut noter que les candidats ont, aussi, d'autres motivations qui les poussent à suivre la formation en didactique des mathématiques comme leur désir d'améliorer leurs pratiques enseignantes (Abdeljaouad, 2009), mais cette envie d'intégrer l'enseignement supérieur est une raison considérable qui les aide à dépasser leurs contraintes[25]. La rareté de postes ouverts à l'université ces dernières années et la crise socio-économique ont fait que le nombre de candidats qui veulent poursuivre le mastère de didactique des mathématiques est de moins en moins important[26].

A noter enfin que huit docteurs parmi les vingt sont partis à la retraite sans pouvoir *profiter,* comme il se doit, de leurs expertises dans le domaine de la didactique des mathématiques. Ceci représente, selon nous, une perte regrettable surtout que le corps des docteurs en didactique des mathématiques n'est pas entrain de se renouveler, ce qui risque de mettre en péril tous les efforts fournis, depuis plus de vingt-quatre ans, pour développer cette discipline en Tunisie.

3.5 Quelques réalisations des didacticiens tunisiens

Au fil des années, la coopération entre l'ISEFC et les laboratoires de recherche français en didactique des disciplines s'est affaiblie. Le départ à la retraite de l'équipe[27] qui a lancé la formation en didactique des disciplines a eu des répercussions négatives sur la dynamique mise en place, à l'ISEFC, pour développer cette discipline en Tunisie. Ajoutons à cela, comme l'ont noté Chellougui & Durand-Guerrier (2016), les didacticiens des mathématiques tunisiens n'ont pas encore réussi à mettre en place une structure de recherche tunisienne spécialisée reconnue institutionnellement. Malgré ces difficultés, certains didacticiens des mathématiques ont pu continuer à progresser dans leurs recherches et ont pu marquer leur présence dans les sphères nationale et internationale.

---

[25] Les candidat(e)s ont des engagements professionnels, sont généralement marié(e)s et père de famille et sont souvent obligé(e)s de faire des déplacements fréquents, de centaines de kilomètres, pour rejoindre le lieu de la formation (l'ISEFC).

[26]Etant responsable du master de didactique des mathématiques à l'ISEFC, nous avons enregistré ces deux dernières années une chute considérable du nombre de candidats voulant s'inscrire au mastère. Alors que d'habitude nous recevons plus qu'une soixantaine de dossiers de candidature, l'année universitaire 2021-2022 nous n'avons reçu que onze dossiers et cette année 2022-2023 nous n'avons reçu que treize dossiers.

[27]Il s'agit de Malika Ayadi Trabelsi, de Mahdi Abdeljaouad, de Samir Marzouki,de Ahmed Chabchoub etc.

- **Mise en place d'une association tunisienne de didactique des mathématiques**

L'idée de créer une association tunisienne de didactique des mathématiques est tout à fait naturelle puisqu'une petite communauté de didacticiens tunisiens a commencé à naître. En 2007, les premiers docteurs ont concrétisé ce rêve en créant l'Association Tunisienne de Didactique des Mathématiques (ATDM). Cette association a été crée pour favoriser le rayonnement de la recherche en didactique des mathématiques en Tunisie, diffuser la culture didactique dans la communauté des enseignants, des inspecteurs et des enseignants universitaires des mathématiques et organiser des rencontres scientifiques entre didacticiens des mathématiques et des acteurs de la scène éducative tunisienne. Depuis sa création, l'ATDM tient à organiser une rencontre annuelle sous une thématique didactique particulière, au cours des vacances de printemps, qui réunit chercheurs experts tunisiens et étrangers, des jeunes chercheurs qui peuvent présenter leurs travaux en cours, des enseignants de mathématiques de tous les niveaux et d'autres acteurs qui s'intéressent à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.Depuis quelques années, le bureau de l'ATDM et les didacticiens en général réfléchissent sur les possibilités de créer, sous l'égide de l'ATDM, une revue scientifique tunisienne pour la publication des résultats des recherches en didactique des mathématiques. Cet objectif ne s'est pas encore concrétisé, mais ne tardera pas à voir le jour.

- **Une licence de «mathématiques pour l'enseignant»**

L'ISEFC a été, principalement, fondé pour assurer la formation continue des enseignants du primaire et du secondaire dans diverses disciplines. Il délivre, entre autres, un diplôme de licence en mathématiques agréé par le ministère de l'enseignement supérieur. Les différentes facultés des sciences en Tunisie assurent, aussi, dans le cadre du système LMD des formations en mathématiques. Ces dernières se ressemblent en terme de contenus d'enseignement. Voulant marqué ses spécificités, l'ISEFC a mis en place, depuis septembre 2019, une nouvelle licence intitulée «MATHEMATIQUES POUR L'ENSEIGNANT». Cette licence, destinée aux futurs enseignants de mathématiques du primaire et du secondaire, est le fruit de réflexions entre enseignants universitaires de mathématiques et de didactique des mathématiques [28] . Le volet didactique dans cette formation est très important. En effet, sur un ensemble de 1650 heures d'enseignement, 670 heures (soit 40% de la totalité de la formation) sont consacrées à l'enseignement de la didactique des mathématiques : *Introduction à la didactique des disciplines, Introduction à la Didactique des Mathématiques, Application des Théories psychologiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, Analyse de textes didactiques, Regards sur les recherches en didactique des mathématiques, Evaluation et didactique, Théorie des situations et ingénieries didactiques, Modélisation praxéologique et Didacticiels de mathématiques.*

Cinq cents heures sont dédiées aux fondements de l'enseignement des mathématiques et au développement de la pensée mathématique. Le reste de la formation est consacrée à l'enseignement de l'histoire des mathématiques, de l'histoire de l'enseignement des mathématiques en Tunisie, des différentes théories des sciences de l'éducation, des Softs Skills, des langues étrangères (français et anglais) et de l'informatique.

La première promotion d'étudiants admis à cette licence est sortie en juillet 2022.

- **Un mastère de recherche en didactique de l'informatique**

L'enseignement de l'informatique en Tunisie se fait de manière informelle dans certaines institutions scolaires du primaire. Mais à partir du collège l'enseignement de cette science devient obligatoire et se poursuit jusqu'au baccalauréat. L'informatique s'enseigne également dans presque tous les cursus universitaires. Des questionnements d'ordres didactiques sur la manière de bien l'enseigner surgissent fréquemment dans la sphère éducative surtout qu'il s'agit d'une science qui évolue de manière rapide.

A l'ISEFC, le département d'informatique a pour mission d'assurer une formation universitaire qui conduit à l'obtention d'une licence fondamentale en informatique. Les demandes récurrentes de la part des étudiants de mettre en place, aussi, un master et des études doctorales en didactique de l'informatique, à l'instar de la didactique des mathématiques établi déjà depuis des années, a motivé l'équipe des didacticiens des mathématiques[29] à s'impliquer et à collaborer avec certains enseignants universitaires d'informatique pour réaliser cette demande. C'est ainsi que l'ISEFC a lancé en septembre 2018 la formation des premiers didacticiens de l'informatique. L'implication des didacticiens des mathématiques dans ce master a permis de mettre en place des projets de recherche avec les étudiants dans le cadre de l'interdisciplinarité mathématiques-informatique (deux masters de recherche au croisement des mathématiques & de l'algorithmique et un master au carrefour des mathématiques & de la Programmation Orientée Objet).

- **Les didacticiens tunisiens dans la scène internationale**

Sous la responsabilité remarquable des professeurs M. Abdeljaouad, A. Achour, L. Lassoued et H. Smida, B. Kachoukh et T. Charrada qui s'intéressaient beaucoup aux questionnements relatifs à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques[30], et avec l'implication et l'engagement considérables des jeunes didacticiens des mathématiques tunisiens, la Tunisie a organisé, à Tozeur, en décembre 2003, le colloque international Espace Mathématique Francophone (EMF) qui se tient tous les trois ans dans l'un des pays francophones. La réussite notable de ce colloque a ouvert les portes aux didacticiens tunisiens pour prendre des responsabilités scientifiques dans d'autres événements internationaux. H. Smida en 2003, 2006, 2009 et 2012, F. Chellougui en 2015, I. Ghedamsi en 2018, R. Kouki en 2022 étaient membres du comité scientifique des congrès EMF. I. Kilani, N. Haj Ali, H. Abrougui, R. Kouki, I. Ghedemsi, M. Abdeljaouad, S. Ben Othmen étaient, tous, responsables de l'un des Groupes de Travail dans l'un des congrès EMF.

Au congrès EMF2012 qui s'est tenu à Genève, la présence tunisienne était aussi remarquable. En effet, F. Khalloufi a été invitée comme co-responsable du projet spécial «*Evaluation, compétences et orientation dans les transitions scolaires: rôle des mathématiques*». Lors d'une session plénière, H. Smida, S. Ben Nejma & F. Khalloufi ont, aussi, animé une table ronde dans laquelle elles ont exposé leurs réflexions sur les évolutions curriculaires dans l'enseignement des mathématiques en Tunisie. Dans EMF2018, qui s'est tenu à Paris, F. Chellougui a participé, également, à l'animation d'une table ronde avec cinq autres didacticiens sous la thématique «*Interdisciplinarité et mathématiques : Dispositifs et prescriptions curriculaires*». Elle a présenté le cas de la Tunisie concernant les dispositifs et les prescriptions curriculaires, l'ancrage de l'interdisciplinarité dans l'approche par compétences et enfin l' appui sur la recherche et l'évolution des pratiques enseignantes.

En 2016, dans le cadre des « invited lectures » du congrès «International Conference on Matematics and Education [31] » (ICME), F. Chellougui a été conviée pour présenter une conférence intitulée «*Difficulties of students engaged on activities related to mathematiccs*

[29]Il faut noter le rôle important du professeur R. Kouki dans la mise en place de ce mastère. Faute de didacticiens de l'informatique, il est actuellement chargé de la coordination de ce mastère.

[30] Mahdi Abdeljaouad et Hikma Smida sont deux enseignants universitaires de mathématiques régulièrement présents dans les commissions de conception des programmes officiels de l'enseignement des mathématiques. Ils ont aussi conçu des manuels scolaires du secondaire. Ils participent souvent dans les événements nationaux et internationaux qui débattent des questions relatives à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

[31]Les rencontres de l'ICME se tiennent tous les quatre ans dans l'un des pays du monde.

formalism». Dans cette même conférence, I. Ghedamsi a été membre du groupe de travail n°16 «Teaching and learning of calculus ».

En 2020, malgré la situation exceptionnelle due à la pandémie covid-19, la Tunisie a organisé, sous l'égide de l'Université de Carthage et sous la présidence de F. Chellougui, la troisième conférence «*International Network for Didactic Research in University Mathematics» (INDRUM).* Ce colloque s'est tenu sous forme de conférence en ligne bien que le comité d'organisation a tout préparé pour accueillir les participants à Bizerte. Les organisateurs et le comité scientifique ont été, alors, contraint de réorganiser le calendrier de l'événement, in extremis. F. Chellougui et I. Ghedamsi faisaient partie du comité scientifique.

En 2022, la Tunisie a organisé le 3ème colloque africain « ADiMA [32] 3 » sous l'égide de l'Association Tunisienne de Géomatique (ATG), de l'Université de Tunis el Manar (UTM) et de l'Université Virtuelle de Tunis (UVT). Le colloque d'ADiMA est reconnu comme une conférence régionale de l'ICMI[33]. R. Kouki et I. Kilani étaient successivement président et vice-président du comité d'organisation et F. Chellougui était vice-présidente du comité scientifique. Au cours de ce colloque, R. Kouki et I. Kilani ont présenté la deuxième conférence plénière intitulée «*État des lieux de la didactique des mathématiques en Tunisie*». S. Ben Nejma, I. Kilani, N. Hadj Ali et F. Khalloufi étaient coresponsables de groupes de travail. Dans le cadre de la table ronde, F. Chellougui a fait une intervention devant un large public dans laquelle elle a mis en valeur certains axes de l'interdisciplinarité développés dans les différents groupes de travail.

Malgré le peu de moyens dont dispose le groupe de didacticiens des mathématiques tunisiens, ils ont pu être visibles sur la scène internationale, non seulement par leur implication dans l'organisation des événements scientifiques mais aussi par la diffusion de leurs travaux de recherche. Ils ont publié de nombreux articles dans les actes des colloques (EMF, CERME, ICME, EEDM, ADiMA, INDRUM...). Ils ont aussi publié plusieurs articles (une quarantaine) dans des revues de référence en didactique des mathématiques, comme *Recherches en Didactique des Mathématiques, African Journal of Research in Mathematics Science and Technology Education*, *Petit x*, *Ensino Da Matematica em Debate*, *Les Cahiers du Français Contemporain*,*Canadian Journal of Science*, *Mathematics and Technologie Education*, *Educaçao Mathematica Pesquisa*, *International Electronic Journal of Matematics Education*, *Neurophysiologie*, *Revue québécoise de didactique des mathématiques*,*ZDM–Mathematics Education*, *Revue Africaine de la Recherche en Informatique et Mathématiques, ...*

Il faut noter aussi la participation de S. Ben Nejma et F. Chellougui dans la rédaction de deux chapitres d'ouvrages (Coulange, Ben Nejma et al., 2012 ; Winslow, Chellougui & Thi Tu, 2015) et la co-publication par I. Ghedamsi d'un ouvrage sous le titre «Teaching and learning of calculus» (Bressoud, Ghedamsi et al., 2016).

4. Conclusion

Au cours de ces vingt-quatre années de didactique des mathématiques, une petite équipe de didacticiens s'est formée. Malgré le peu de moyens dont dispose cette équipe, elle a pu faire des réalisations considérables aussi bien à l'échelle nationale qu'à l'échelle internationale. Les recherches originales menées par les membres (étudiants et chercheurs confirmés) de cette équipe ont permis d'enrichir le regard sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en Tunisie. Ces recherches, comme l'ont souligné, Chellougui et Durand-Guerrier (2016) ont, aussi, imprégné certaines recherches françaises et ont contribué au rayonnement de la didactique des mathématiques dans l'espace francophone. Cependant, il faut noter le peu de recherche en

[32]ADiMA: Association de Didacticiens des Mathématiques Africains.
[33]ICMI : International Commission on Mathematical Instruction.

didactique des mathématiques s'inscrivant dans une approche interdisciplinaire ce qui peut ouvrir dans le futur un nouveau champ de recherche pour les didacticiens tunisiens.

Il faut noter que trois didacticiens [34] ont soutenu leur Habilitation à Diriger des Recherches (HDR). Pour renforcer cette petite équipe, les autres docteurs en didactique des mathématiques sont appelés à passer leur HDR pour une meilleure reconnaissance scientifique aussi bien dans le monde de la recherche qu'auprès des acteurs de la scène éducative tunisienne.

Étant responsable du mastère de didactique des mathématiques à l'ISEFC, nous avons remarqué ces dernières années un désintéressement par rapport aux études post-licence en didactique des mathématiques. Ce désintéressement n'est pas propre à notre discipline. Certains collègues responsables des parcours de mastères en mathématiques, dans diverses universités, ont, également, enregistré ce même problème. Le manque de postes ouverts à l'université et la propagation inquiétante du phénomène des cours particuliers à domicile en mathématiques, comme l'a noté Abdeljaouad (2009), y sont sûrement pour quelque chose.

L'une des difficultés, que nous avons rencontré (et nous continuons à rencontrer) aux niveaux des enseignements et de l'encadrement des étudiants dans le cadre du mastère, est le nombre d'enseignants universitaires en didactique des mathématiques, pouvant intervenir dans la formation, qui ne cesse de diminuer en raison du départ à la retraite de certains collègues. L'engagement de certains étudiants dans des études doctorales à un âge «avancé» ne leur permettra pas d'avoir une carrière professionnelle de longue durée. Cette situation pose, entre autres, la problématique de la viabilité de la didactique des mathématiques en Tunisie. Nous pensons qu'il est indispensable de mettre en place une grande campagne de sensibilisation auprès des acteurs influents de la scène éducative (comme c'était le cas dans la période du lancement du DEA) pour mettre en avant l'importance de la didactique des mathématiques pour un meilleur enseignement apprentissage. L'ouverture des postes d'enseignant-chercheur à l'université est, alors, une priorité nationale non seulement pour la didactique des mathématiques mais aussi pour les autres disciplines.

BIBLIOGRAPHIE

ABDELJAOUAD, M. (2009). *L'introduction de la didactique des mathématiques en Tunisie*. Revue africaine de didactique des sciences et des mathématiques, Numéro 4.

ABDELJAOUAD, M., et HEDFI, H. (2011). Vers une étude des aspects historiques et mathématiques des problèmes ouverts d'Ibn al-Khawwâm (XIIe siècle), *Actes du Premier Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes :* Alger, 1-3 décembre 1986 (pp. 159-178).

BEN NEJMA, S. (2020). *L'impact de la langue de formulation d'un énoncé sur les démarches mises en oeuvre par les élèves dans une activité de modélisation algébrique*, Petit x - n° 112,pp. 55 à 77.

BRESSOUD, D., GHEDAMSI, I., MARTINEZ-LUACES, V. TÖRNER, et G. ONNER, A. (2016). *Teaching and Learning of Calculus.* Part of the ICME-13 Topical Surveys book series (ICME13TS)

BRONNER, A. (1997). *Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée. Thèse de doctorat non publiée*, Université J. Fourier de Grenoble.

BRONNER, A. (2007). *La question du numérique : le numérique en question ? Habilitation à diriger des recherches*, Université Montpellier 2.

CHELLOUGUI, F. (2007). La quantification dans l'enseignement secondaire/supérieur, Etude de cas : la notion de borne supérieure, Travaux Dirigés en lien associé au thème : Étude d'une question ouverte : Les transitions entre l'enseignement secondaire et les filières post-Baccalauréat. In I. Bloch, & A. Rouchier, (Eds). *Perspectives en didactique des mathématiques*, *Cours de la XIIIème École d'été de didactique de mathématiques, 2005*. Actes (CDROM) de EEDDM13. La Pensée Sauvage.

[34] Imene Ghedamsi et Rahim Kouki en 2017 ainsi que Faiza Chellougui en 2018.

CHELLOUGUI, F. (2009). L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel, entre l'explicite et l'implicite, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 29, n°2 (pp. 123-154). La Pensée Sauvage.

CHELLOUGUI, F., GHEDAMSI, I. et KOUKI, R. (2015). Entre le formalisme mathématique et ses "significations" : l'acte interprétatif, un maillon faible de la relation didactique ? Une étude dans le contexte de l'enseignement secondaire / supérieur, Travaux Dirigés associé au thème : Les élèves en difficulté dans l'enseignement ordinaire. In D. Butlen, & al. (Eds.). *Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif*. Actes de EEDM17 (pp. 465-474). La Pensée Sauvage.

CHELLOUGUI, F., et DURAND-GUERRIER, V. (2016) Recherches en didactique des mathématiques en Tunisie. Collaborations avec la France. In M. Artigue & L. Trouche, *La tradition didactique française au-delà des frontières. Exemples de collaborations avec l'Afrique, l'Amérique latine et l'Asie*, pp. 39-58, Edition, Commission française pour l'enseignement des mathématiques (CFEM), Juillet 2016.

COULANGE, L., BEN NEJMA, S., CONSTANTIN, C., & LENFANT-CORBLIN, A. (2012). Des pratiques enseignantes aux apprentissages des élèves en algèbre, à l'entrée au lycée. In L. Coulange, J. P. Drouhard, J. L. Dorier, & A. Robert (Eds), *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et perspectives, Hors-série de la revue RDM*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

DURAND-GUERRIER, V., et BEN KILANI, I. (2004). Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques, Exemple dans l'enseignement secondaire Tunisien. *Les Cahiers du Français Contemporain*, 9 (pp. 29-55).

DURAND-GUERRIER, V., et BEN KILANI, I. (2005). La didactique des mathématiques aujourd'hui, in Chabchoub (ed.) Regards actuels sur les didactiques des disciplines, Tunis : ATURED.

DURAND-GUERRIER, V., DIAS, T., et BEN KILANI I., (2006). *Plurilinguisme et apprentissage des mathématiques. Ambiguïtés référentielles ; négation et quantification*, Les Langues Modernes, 3, 75-83.

ERICKSON, L. (1996). *Designing Integrated Curriculum that Promotes Higher Level Thinking*. Alexandria, VA : Association for Supervision and Curriculum Development.

FARIAS, L M S. (2010). *Étude des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire : Une analyse des pratiques enseignantes en classes de troisième et de seconde,* Mathématiques [math], Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, Français. fftel-00588484f.

GHEDAMSI, I. (2008). *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée de l'Université*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 2 et Université de Tunis.

HAJ ALI, N. (2005). *Quelles mathématiques enseigner dans une école supérieure d'économie? Une étude de cas en Tunisie*.Thèse pour l'obtention du grade de docteur de l'université Claude Bernard Lyon 1 et l'Université de Tunis.

KHALLOUFI-MOUHA, F. (2009). *Étude du processus de construction du signifié de fonction trigonométrique chez des élèves de 2eannée section scientifique*. Thèse de doctorat, Université de Tunis.

KLEIN, J. (1998). *L'éducation primaire, secondaire et postsecondaire aux États-Unis : vers l'unification du discours sur l'interdisciplinarité*. In Revue des sciences de l'éducation, Vol. XXIV (1), pp. 51-75.

KOUKI, R. (2008). *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : Entre syntaxe et sémantique*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1 et l'Université de Tunis. https://www.theses.fr/131792857

KOUKI, R. (2017). *Recherches sur l'articulation des dimensions sémantique, syntaxique, sémiotique, praxéologique et épistémologique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Étude de cas : algèbre du secondaire et développements limités au début de l'université*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Tunis el Manar.

LENOIR,Y. (2020). « L'interdisciplinarité dans l'enseignement primaire : pour des processus d'enseignementapprentissage intégrateurs », Tréma [En ligne], 54, mis en ligne le 01 décembre 2020, consulté le 14 décembre 2020. URL : http://journals.openedition.org/trema/5952 ; DOI : https://doi.org/10.4000/trema.5952

LARGUIER, M. (2009). *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession,* Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, Français. fftel-00637391f.

MAINGAIN, G., DUFOUR, A., et FOUREZ, B. (2002). *Approches didactiques de l'interdisciplinarité. Bruxelles*, De Boeck.

MIEKE, B. (2002). Travelling concepts in the humanities.A rough guide,Toronto, Buffalo & London, University of Toronto Press.

NAJAR, R. (2015). À propos de l'enseignement de la théorie des ensembles : les choix institutionnels dans la transition secondaire/supérieur en Tunisie. *Recherches en didactiques des mathématiques,* Vol. 35, n°2 (pp. 141-182). La Pensée Sauvage.

SMIDA, H., BEN NEJMA, S., et KHALLOUFI-MOUHA, F. (2012). Evolutions curriculaires et conceptions sousjacentes à l'enseignement des mathématiques en Tunisie – Une étude de cas dans le cadre des tables rondes EMF2012 : évolutions curriculaires récentes dansl'enseignement des mathématiques de l'espace francophone. In J-L. Dorier, & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle* – Actes du colloque EMF2012 (Plénières, pp. 127–141). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

WINSLOW, C., CHELLOUGI F., et THI THU H. (2015). Language diversity in research and its consequences. In R. Barwell, P. Clarkson, A. Halai, M. Kazima, J. Moschkovich, N. Planas, M. Phakeng, P. Valero, & M. Villavicencio Ubillús (Eds.), *Mathematics Education and Language Diversity* (pp. 85-101). New York: Springer.

GROUPES DE TRAVAIL

Groupe de travail n°1 (GT1)

Les rapports entre les mathématiques et le concret, les mathématiques et les autres disciplines

Bilan du GT 1

LES RAPPORTS ENTRE LES MATHÉMATIQUES ET LE CONCRET, LES MATHÉMATIQUES ET LES AUTRES DISCIPLINES

Responsables

Sonia Ben Nejma[1] – Viviane Durand Guerrier[2]

Introduction

Les liens entre mathématiques et réalité sont anciens et profonds, et ce bien que les mathématiques développent leurs propres concepts et outils qui sont au cœur de la discipline. Ces liens nourrissent les interactions avec de nombreuses disciplines telles que les sciences physiques et chimiques, les sciences de la vie et de la terre, les sciences économiques, l'informatique…, notamment dans le cadre de la modélisation mathématique et des mathématiques mixtes. Comme le souligne Chevallard (2001) : « Penser en termes de mathématiques mixtes, c'était surtout aller au contact du monde, ne pas craindre de se mêler à lui, de rechercher le métissage. ». Les politiques éducatives internationales n'échappent pas à cette réalité et accordent désormais plus d'importance au développement de compétences interdisciplinaires, par contraste avec des réformes d'enseignement passées où l'aspect structuraliste et abstrait des mathématiques primait. Les curricula actuels tendent à développer la prise de conscience de cette double valence par les élèves et par les enseignants et à mettre en lumière les enjeux des interactions pour les apprentissages mathématiques d'une part, l'application des mathématiques aux autres disciplines d'autre part. Pour cela, il est nécessaire de développer-une interdisciplinarité authentique, ce qui représente un défi pour les systèmes éducatifs, qui doivent donner aux élèves de solides connaissances mathématiques, tout en permettant à ceux-ci de comprendre leurs usages dans les autres disciplines. L'interaction entre les mathématiques et le concret ainsi que les autres sciences apparait comme un sujet d'intérêt constant pour la communauté des chercheurs en didactique des disciplines. Dans le cadre du groupe de travail n°1 d'ADIMA 3 nous avons eu l'occasion d'entendre sept communications présentant des travaux conduits au Sénégal, en France, en Tunisie et au Maroc. Une quinzaine de participants ont suivi régulièrement les travaux de ce groupe. Ces interventions sont réparties selon trois axes de recherche : *pensée algorithmique et informatique*, *modélisation par les équations différentielles* et *contextes extra-mathématique: Probabilités et statistiques*.

I- Axe 1 : Pensée algorithmique et informatique

L'informatique n'échappe pas à la dialectique outil-objet dans l'apprentissage des concepts mathématiques. En effet, depuis plusieurs années, l'enseignement des mathématiques utilise différents outils numériques que sont les logiciels de géométrie dynamique, les tableurs, les calculatrices et les logiciels de calcul formel. Aujourd'hui, la programmation a fait son entrée dans les programmes, l'algorithmique et la programmation semblent donc maintenant devenues des objets d'enseignement à part entière à travers les langages préconisés dans les documents ressources. Dans ce sens, le texte de Mizienne Mahdia et Rahim Kouki a porté sur la transposition

[1] Laboratoire de recherche LaRINA- Université de Carthage- Faculté des sciences de Bizerte -Tunisie- sonia.bennejma@fsb.u-carthage.tn

[2] Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, CNRS-UM, Université de Montpellier-France – viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

didactique des concepts de la Programmation Orientée Objet (POO) via l'approche par emboîtement auprès des étudiants tunisiens. Ce travail montre la pertinence de la théorie des catégories dans les analyses didactiques relatives à ce processus et dans la conceptualisation des ingénieries de développement de situations d'apprentissage via la méthode d'emboitement développée dans les travaux de Djelil (2016). L'étude de Emna Trabelsi et Rahim Kouki est centrée sur l'enseignement et l'apprentissage du langage SQL[3] à l'université et les difficultés rencontrés par les étudiants pour l'appréhender. L'approche didactique d'écriture de Requêtes d'interrogation SQL qu'ils développent s'inspire de celle utilisée dans certains travaux en didactique des mathématiques. (Chaachoua, 2010) et se base sur le modèle praxéologique. Cette approche didactique vise à explorer la conceptualisation des étudiants du langage SQL et à identifier la formulation des clauses de requêtes d'interrogation SQL. Ces deux interventions ont suscité l'intérêt des participants qui s'interrogent sur le rôle du langage informatique dans la conceptualisation des objets de savoir et dans la résolution de problèmes concrets d'autant plus que les deux disciplines mathématique et informatique, tout en partageant un certain nombre de concepts font appel à des formes de pensées spécifiques (par exemple, le rapport au fini et à l'infini).

II- Axe 2 : modélisation par les équations différentielles

Le triptyque situation – pensée mathématique – pensée informatique s'articule autour de la modélisation mais aussi autour des choix didactiques lorsqu'on souhaite enseigner conjointement mathématique et informatique à travers une situation. Le texte de Lamjed Brinsi et Sonia Ben Nejma, s'intéresse à la place de la pensée mathématique et de la pensée informatique par rapport à la modélisation de certaines situations d'apprentissage dans un contexte d'enseignement particulier, celui de travaux pratiques de mathématiques appliquées. Quel rôle joue l'outil de programmation numérique dans cette interaction potentielle ? L'étude se centre sur les conditions de viabilité de la résolution numérique des équations différentielles par la méthode d'Euler dans un contexte d'enseignement interdisciplinaire, à l'interface des mathématiques et de l'informatique, à partir des enjeux épistémologiques et didactiques liés à sa mise en pratique. Cette étude s'inscrit dans le cadre de la théorie anthropique de la didactique (Chevallard, 1989) nourrie par l'approche sémiotique en termes de registres sémiotiques (Duval, 1993). Le travail s'articule autour de la résolution d'un problème mathématique via un logiciel de programmation informatique (ici, Maple) en faisant appel au processus de la double transposition didactique et informatique développée dans les travaux de Briant et Bronner (2015 pour mettre en avant un système de contraintes qui pèsent sur les étudiants pour mettre en œuvre cette technique.

L'intervention de Anis Jabrane et Sonia Ben Nejma a une visée différente de la précédente puisqu'il s'agit d'une analyse de l'évolution de l'enseignement des équations différentielles dans le système éducatif tunisien, en terminale. Cette étude montre que l'activité de modélisation est omniprésente au niveau des praxéologies mathématiques développées dans le manuel officiel actuellement en vigueur avec une variété des contextes abordés et une dialectique entre registres sémiotiques algébrique et graphique plus renforcée. Cependant peu de place est accordée à cette approche dans les évaluations nationales du baccalauréat ce qui interroge la place accordée à l'interdisciplinarité au niveau des pratiques d'enseignement et de formation et la cohérence du système didactique en général du point de vue du savoir à enseigner et des pratiques d'évaluation.

III- Axe 3 : Contextes extra-mathématiques- Probabilités et statistiques

Le champ de la recherche sur les contextes extra-mathématiques prend de plus en plus d'ampleur mais il faut remarquer que la plupart des travaux sur ce thème sont strictement internes aux

[3] SQL (pour Structured Query Language) est un langage de programmation permettant de manipuler les données et les systèmes de bases de données relationnelles à partir de requêtes.

mathématiques. Trois communications s'inscrivent dans cet axe et deux parmi les trois portent sur l'enseignement-apprentissage de la probabilité et la statistique. Les questions proposées étaient les suivantes : Quelles sont leurs caractéristiques spécifiques de l'enseignement apprentissages de ces domaines? Quelles contraintes ? Quel est le rôle des enseignants? Comment sont-ils intégrés dans les curricula ? Comment « les aspects interdisciplinaires » de ces pratiques sont-ils légitimés?

L'étude présentée par Khadidiatou Gueye et Moustapha Sokhna propose une approche permettant d'appréhender le sens de l'écart type à travers une situation complexe en s'appuyant sur l'approche anthropologique du didactique. Lex auteurs s'interrogent plus généralement sur les projets et les enjeux de l'enseignement de la statistique en Afrique tout en sachant que les outils aussi bien mathématiques que technologiques représentent des moyens puissants de modélisation du réel.

Le travail de Mohamed Hatem Kefi s'intéresse aux lois de probabilités ainsi qu'aux théorèmes limites constituant les fondements de la statistique. Cette recherche de nature exploratoire vise à diagnostiquer les difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'introduction des lois discrètes et continues et dans le rôle fondamental des théorèmes de limites dans l'appréhension des liens entre les différentes lois.

Par ailleurs, le texte proposé par Sanaa Slimi s'intéresse à la variété des contextes extra-mathématiques convoqués par les situations d'apprentissages proposées dans trois manuels marocains de 3ème année du secondaire. Cette réflexion didactique émane des résultats obtenus par les élèves marocains dans les enquêtes internationales d'évaluation des acquis TIMSS et PISA pour les items relatifs à la résolution de problèmes extra-mathématiques. La grille d'analyse amorcée prend appui sur le modèle théorique proposé par PISA pour l'évaluation des acquis des élèves en mathématiques.

Conclusion et perspectives

La variété des contributions proposées en termes de disciplines, de thématiques et de systèmes éducatifs, ainsi que la richesse des échanges et les nombreuses questions soulevées montrent que ce sujet mérite d'être poursuivi dans le cadre des échanges au sein d'ADIMA, avec des contributions d'autres systèmes éducatifs.

Il faut noter que le rôle ders institutions a été peu abordé au sein du groupe ; on sait cependant que ceci joue un rôle central dans la possibilité de faire vivre en classe une interdisciplinarité authentique, qui ne doit pas se faire au détriment d'une formation solide dans les disciplines concernées.

La résolution des équations différentielles par la méthode d'Euler à l'interface des mathématiques et de l'informatique : enjeux épistémologiques et didactiques

Lamjed Brinsi
Université virtuelle de Tunis
Sonia Ben Nejma
Université de Carthage–Faculté des sciences de Bizerte-Tunisie

RÉSUMÉ

Cet article présente une réflexion didactique sur les conditions de viabilité de la résolution numérique des équations différentielles par la méthode d'Euler dans un contexte d'enseignement interdisciplinaire : *les ateliers de mathématiques appliquées* , en première année de licence, dans des institutions supérieures d'études technologiques (ISET).Nous caractérisons cette méthode de résolution à l'interface des mathématiques et de l'informatique à partir des enjeux épistémologiques et didactiques liés à sa mise en pratique. Nous mettons en exergue un système de contraintes qui pèsent sur sa mise en œuvre par les enseignants lors de la modélisation informatique d'un problème mathématique autour de cet objet de savoir. Cette étude s'inscrit dans le cadre de la théorie anthropologique de la didactique (TAD) enrichie par la théorie des registres sémiotiques (Duval, 1993) et par le modèle de la double transposition didactique et informatique (Briant, Bronner 2015). Notre méthodologie s'appuie sur une analyse épistémologique de la méthode d'Euler selon un découpage praxéologique et une analyse des aspects à la fois algorithmiques et informatiques liés à sa transposition didactique.

1. INTRODUCTION ET PROBLEMATIQUE

Plusieurs travaux en didactique des mathématiques s'accordent sur la prédominance de l'approche algébrique dans l'enseignement des équations différentielles (ED) dans l'enseignement obligatoire et à l'université (Artigue, 1989 ; Saglam, 2004 ; Malonga, 2006 ; Ben Nejma et Jabrane, 2023 *à paraitre*), ce qui amène à réfléchir sur les conditions de viabilité d'autres approches et les contraintes qui pèsent sur leur mise en œuvre dans la pratique. Nous nous intéressons à l'approche numérique de résolution des ED qui permet de mettre en lien les deux disciplines mathématiques et informatique dans le cadre des ateliers de mathématiques appliquées dispensés à des étudiants de 1ère année de licence appliquées dans quelques institutions supérieures d'études technologiques (ISET) de Tunisie. Ces ateliers se rapprochent des séances de travaux pratiques spécialisés en mathématiques qui favorisent l'interaction des environnements classique (papier crayon) et informatique via des logiciels de calculs symboliques tels que Maple et Matlab suggérées par ces institutions. Ce cadre d'enseignement nous semble intéressant à explorer du point de vue des apprentissages interdisciplinaires dispensés (Ben Nejma et Brinsi, 2021, 2022) qui présente un aspect nouveau par rapport aux cours intégrés où l'outil informatique n'est pas mis en œuvre et revêt un caractère purement disciplinaire. Dans le cadre de cette intervention, nous mettons au centre de notre problématique les conditions et les contraintes de nature épistémologique et didactique susceptibles d'impacter l'enseignement apprentissage de cette technique dans un cadre hybride qui met en interaction deux disciplines dont l'une est au service de l'autre et deux environnements de travail classique et informatique. La modélisation des problèmes mathématiques par des équations différentielles au moyen de la méthode d'Euler permet de mettre en évidence cette complexité du cadre d'enseignement de cette notion faisant appel à des praxéologies mixtes (Artaud, 2003 ; Ben

Nejma et Jabrane, 2023 *à paraitre*) autour d'objets de savoir mathématiques (variable, fonction, graphique, dérivée, primitive, suites récurrentes …) et d'objets de savoir informatique (algorithme, variables informatiques, instruction, commande, boucle etc.…). Ce travail s'inscrit dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1998) et s'appuie sur la modélisation de Briant et Bronner (2015) du processus de double transposition didactique et informatique d'un problème mathématique. La caractérisation des praxéologies mixtes est enrichie par la notion de registre de représentations sémiotiques (Duval, 1993) permettant de cerner les aspects épistémologiques et didactiques qui caractérisent à la fois ces praxéologies mathématiques et informatiques et d'identifier les enjeux de la transposition informatique de cette approche numérique de résolution.

Nous commençons par présenter les outils théoriques qui nous ont permis de conduire cette analyse didactique et épistémologique.

2. CADRE THEORIQUE

2.1 Notion de praxéologies

La théorie anthropologique du didactique TAD (Chevallard, 1998), considère l' activité mathématique fruit d'activité humaine et la modélise en termes de praxéologies qui se déclinent en des organisations mathématiques (OM) et des organisations didactiques (OD) est analysée selon le modèle des 4T [T/τ/θ/Θ] où il est question d'accomplir une tâche t d'un certain type T, au moyen d'une technique τ (manière de faire) justifié par une technologie θ qui est à son tour est justifiable par une théorie Θ. L'introduction de l'outil informatique dans l'accomplissement de certains types de tâches comme la résolution numérique des ED donne lieu à de nouvelles praxéologies développées dans l'environnement informatique. Comme le souligne Artaud (2003), il est nécessaire de considérer solidairement techniques et savoirs au moyen de la notion de praxéologie, et plus spécialement de praxéologies mathématiques mixtes, soit des praxéologies qui mêlent mathématiques et une autre discipline et dont il est fondamental d'examiner l'écologie dans les systèmes d'enseignement ainsi que leurs mises en œuvre dans la pratique. En effet, le développement d'une technique et de la technologie qui la soutiennent s'accommodent mal avec une appréhension par des disciplines totalement segmentées. Par ailleurs, pour répondre à la question de quoi est formée une technique donnée et des représentations sémiotiques qui interviennent dans le passage d'un environnement à un autre ou d'une discipline à une autre nous faisons appel à l'approche sémiotique de Duval (1993).

2.2 Registres sémiotiques (de Duval)

Duval (1993) considère que la perception des concepts ou des relations entre des objets de savoirs est une activité cognitive qui est possible grâce à des signes et des symboles nécessaire à l'acquisition des concepts auxquels ils renvoient. Ces représentations obéissent à des règles bien établies, sous une même enveloppe, que Duval nomme : « *registre de représentation sémiotique* », c'est « *un système de représentation qui a ses propres contraintes de signifiance et de fonctionnement.* » (Duval, 1993, p.39). Un registre de représentation sémiotique doit permettre la réalisation de trois activités cognitives fondamentales de la pensée : formation, traitement et conversion d'une représentation. La conversion entre registres est une transformation d'une ou des représentations d'un registre à une ou à des autres représentations dans un autre, de telle façon que ces dernières permettent d'expliciter d'autres significations relatives à ce qui est représenté. Ainsi, selon l'auteur, un point fondamental dans l'activité mathématique n'est pas l'utilisation nécessaire de représentations sémiotiques mais la capacité à passer d'un registre de représentation sémiotique à un autre registre, c'est-à-dire la capacité à reconnaître des représentations d'un même objet dans des registres différents.

3. LE MODELE DE LA DOUBLE TRANSPOSITION DIDACTIQUE ET INFORMATIQUE (BRIANT ET BRONNER, 2015)

Le modèle proposé par Briant et Bronner (2015) met en évidence la distance qui sépare l'activité initiale de résolution d'un problème mathématique dans l'environnement habituel (papier/crayon), de sa programmation dans une machine. L'auteur apporte une distinction entre algorithme informatisé (le langage « pseudo-code ») et « programme informatique » à proprement parler (en langage informatique**).** Les auteurs s'interrogent sur la place de la pensée algorithmique relativement à la pensée mathématique et développent la double transposition de la résolution d'un problème mathématique en vue de sa programmation qui peut se schématiser comme suit :

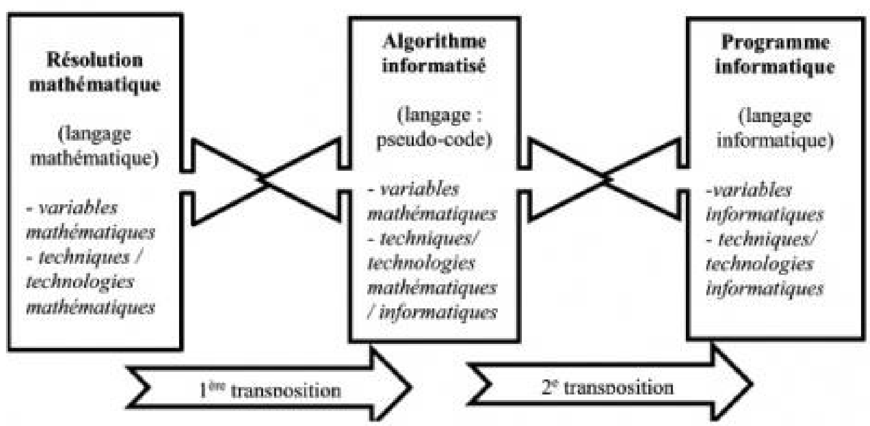


Figure 1. *Double transposition de la résolution d'un problème mathématique en vue de sa programmation (Briant et Bronner, 2015)*

Trois types de résolution sont impliqués dans la double transposition : *La résolution mathématique* **consiste** en la résolution du problème dans le cadre mathématique « habituel », c'est-à-dire dans l'environnement classique papier-crayon. Cette résolution peut donner lieu à un premier algorithme : « algorithme mathématique », *la résolution algorithmique* : une fois la résolution mathématique achevée, une première transposition aura lieu elle consiste à transposer l'algorithme mathématique en un algorithme informatisé, écrit en pseudo-code et *la résolution informatique* : L'opération qui aboutit à l'écriture du programme avec un langage informatique adéquat au logiciel en jeu, à la suite de la première transposition.

La première transposition *« transposition algorithmique »* se fait à différents niveaux :

- *Au niveau du langage* : il s'agit de passer d'un langage mathématique, c'est-à-dire *le langage utilisé usuellement par les écrits mathématiques* (Modeste 2012, p.62) à un langage en pseudo-code appelé **Langage de Description d'Algorithmes (LDA)** c'est « *un langage intermédiaire, inspiré des instructions des langages informatiques mais libéré de certaines contraintes et manipulant directement les objets mathématiques »* (Modeste 2012, p.24)

Le second niveau prend en compte la spécificité des praxéologies relatives à la théorie anthropologique de la didactique, en particulier les organisations mathématiques développées autour d'une notion mathématique ou d'une tâche à accomplir :

- *Au niveau des techniques*, celles-ci différent d'un algorithme à un autre, de même les technologies-théories sous-jacentes s'en trouvent alors modifiées.

La seconde transposition : *transposition informatique* se fait à son tour à différents niveaux **:**

- *Au niveau du langage* : il s'agit de passer du langage en pseudo-code de l'algorithme à un langage informatique, c'est-à-dire un langage de programmation, ce qui nécessite une reformulation pour donner un équivalent qui soit compréhensible par la machine, selon sa structure interne et dans son langage.

- *Au niveau des variables* : les variables mathématiques utilisées dans les algorithmes vont céder la place aux variables informatiques dans le programme informatique. Ces variables font partie de la technologie des praxéologies informatiques :

> Au *niveau des techniques et technologies utilisées :* aux techniques et technologies-théories propres à la résolution du problème en environnement papier-crayon, viennent s'adjoindre celles liées aux principes de programmation informatique (notion de variables informatiques, affectation de variables, lecture/écriture, structures alternatives, structures répétitives. (Briant et Bronner, 2015, p.237).

4. ENJEUX EPISTEMOLOGIQUES LIES A LA METHODE D'EULER :

La méthode d'Euler dite aussi « méthode des tangentes » ou encore «méthode polygonale », représente l'une des techniques de base des approches numériques et graphiques de résolutions approchée des équations différentielles. Il s'agit d'une technique numérique qui permet de résoudre le type de tâche T : approcher numériquement et graphiquement une solution d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre connaissant une condition initiale (problème de Cauchy), qui se présente sous la forme : (E) : $\begin{cases} y' = f(x, y), x_0 \leq x \leq x_0 + T \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Les objets de savoirs mathématiques et les relations en jeu sont en général accessibles pour des étudiants de première année universitaire, c'est ce qui explique en quelque sorte sa raison d'etre dans les programmes officles de ces insitutions qui offre une formation en mathématique au service d'autres disciplines comme la physique et l'informatique. De plus le caractère algorithmique et programmable de cette technique explique le choix de l'institution insitutionnel de l'intégrer comme un thème d'étude permanent au sein des ateliers de mathématiques. Comme toute autre approche numérique adoptée pour « résoudre les équations différentielles », l'approximation des solutions est basée sur la discrétisation de la variable x. Pour effectuer le calcul itératif, l'utilisateur doit disposer de la durée T de la simulation, des conditions initiales x_0 et y_0, de la fonction f et du pas h de discrétisation de l'intervalle $[x_0, x_0 + T]$. L'intervalle $[x_0, x_0 + T]$ est alors divisé en un nombre N de subdivisions de même longueur $h = \frac{1}{N}$, finalement la méthode d'Euler renvoie une liste $(y_0, y_1, \dots, y_N)$ des valeurs approchées des $y(x_i)$ où $x_i = x_0 + ih$ et y désigne la solution « exacte » de l'équation différentielle. La courbe polygonale reliant les points $M_i(x_i, y_i)$ que nous appellerons la courbe d'Euler, est une approximation graphique de la solution « exacte », elle offre une vision approximative du comportement de fonction $y(t)$ solution « exacte » de notre problème. Ainsi, si l'on souhaite que cette vision approximative du comportement de la fonction $y(t)$ solution « exacte » soit bonne, le choix du pas de discrétisation h doit être suffisamment petit, et par conséquent le nombre N des itérations (le nombre de valeurs à calculer) peut devenir très important, ce qui impose une certaine économie et rapidité de calcul et une mémorisation importante, ce qui explique le recours à la résolution numérique dans un environnement informatique via un logiciel de calcul symbolique.

Par ailleurs, la technologie qui justifie cette technique repose sur le fait que la solution visée y du problème de Cauchy qui est dérivable en x existe et par suite admet un développement limité au moins à l'ordre 1 au voisinage de tout point x de l'intervalle$[x_0, x_0 + T]$.On peut donc écrire que : $y(x + h) = y(x) + h.\ y'(x) + o(h)$ donc connaissant la valeur de $y(x)$ et pour une valeur raisonnablement petite de h, l'expression $y(x) + h.\ y'(x)$ est une bonne approximation de $y(x + h)$. Comme l'expression de $y'(x)$ qui est $f(x, y(x))$ est connue, on obtient ainsi l'approximation d'Euler appelée souvent « formule d'Euler » : $y(x + h) \approx y(x) + h.\ f(x, y(x))$. Cette formule peut être obtenue en supposant simplement la dérivabilité de la solution visée qui se traduit mathématiquement par l'écriture $\lim_{h\to 0} \left(\frac{y(x+h)-y(x)}{h}\right) = y'(x)$ et alors pour une valeur assez petite de $h \approx 0$ on a : $\frac{y(x+h)-y(x)}{h} \approx y'(x) = f(x, y)$ ce qui permet de retrouver la formule : « $y(x + h) \approx y(x) + h.\ f(x, y(x))$ » (localement la courbe de la fonction *y* ressemble à sa tangente).

Une autre technologie permet de justifier cette technique par une intégration de l'équation sur l'intervalle $[x, x + h]$. On obtient ainsi, $y(x + h) - y(x) = \int_x^{x+h} y'(s)ds = \int_x^{x+h} f(s, y(s))ds$,

Pour h assez petit en appliquant la méthode des rectangles à l'intégrale $\int_x^{x+h} f(s, y(s))ds$ on a $\int_x^{x+h} f(s, y(s))ds \approx h.\ f(x, y)$. D'où la formule d'Euler : « $y(x + h) \approx y(x) + h.\ f(x, y(x))$ »

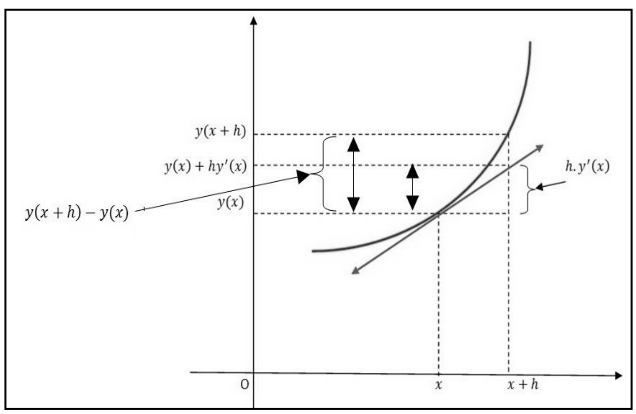


***Figure 2.** Illustration graphique de la méthode d'Euler*

La valeur estimée de la solution F au point $x_1 = x_0 + h$ si on la note y_1 est donnée par :

$y_1 = y_0 + h.\ f(x_0, y_0)$, puisque $F(x_1) = y(x_0 + h) \approx y(x_0) + h.\ f(x_0, y_0)$

Celle aux point $x_2 = x_0 + 2h = x_1 + h$ si on la note y_2 est donnée par :

$y_2 = y_1 + h.\ f(x_1, y_1)$, puisque $F(x_2) = y(x_1 + h) \approx y(x_1) + h.\ f(x_1, y_1)$ et ainsi de suite on construit la suite réelle récurrente $(y_k)_{0\leq k\leq N}$des valeurs approchées des $F(x_k)$ les valeurs de la solution F aux points $(x_k)_{0\leq k\leq N} = (x_0 + kh)_{0\leq k\leq N}$, que nous appelons la suite d'Euler, par la relation de récurrence : $\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{k+1} = y_k + h.\ f(x_k, y_k); \end{cases} \forall\ 0 \leq k \leq N - 1$

Une fois sont déterminées les valeurs $(y_k)_{0\leq k\leq N}$la fonction Y affine par morceaux définie sur l'intervalle $[x_0,\ x_0 + T]$ par $Y(x_k) = y_k$ pour tout $k \in \{0,1,\ \dots .\ N\}$. C'est-à-dire la fonction définie par : $Y(x) = f(x_k\ ,\ y_k)(x - x_k) + y_k$; pour $x \in [x_k,\ x_{k+1}]$ pour $k \in \{0,1,\ \dots .\ N\}$ est une approximation de F la solution exacte de notre problème : la courbe reliant les points $M_k(x_k,\ y_k)$ étant proches des points $A_k(x_k,\ F(x_k))$ est une courbe approximative de la solution visée F et une étude qualitative de celle-ci pourra renseigner beaucoup d'informations sur le comportement de F (variations, extrémums, valeur en un point x…).

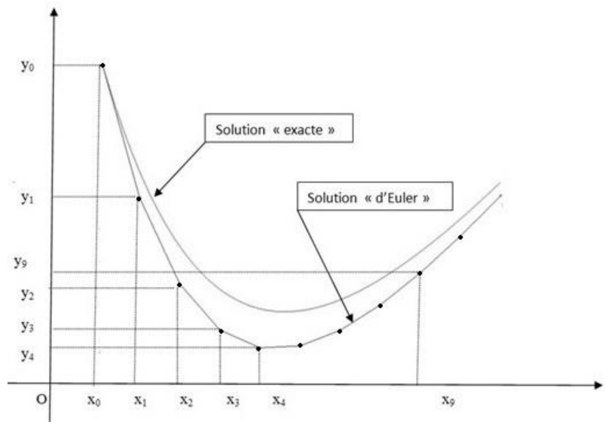


***Figure 3**. Courbe approximative par la méthode d'Euler*

Pour réaliser la technique relative à la methode d'Euler, on ramène l'équation différentielle du premier ordre à la forme : (E) :$y' = f(x,\ y)$ où f est une fonction numérique à deux variables réelles. La solution lorsqu'elle existe sur un intervalle I représente une fonction u dérivable sur I et vérifiant : «$\forall x \in I,\ u'(x) = f(x,\ u(x))$». Ainsi la mise en œuvre d'une telle technique met en avant des représentations sémiotiques qui renvoient à objets de savoirs de nature différentes : la fonction numérique y de la variable x (inconnue), une fonction Y affine par morceaux sur I (solution approchée d'Euler), f la fonction numériques à deux variables réelles (x, y) qu'exige la mise de l'ED en question sous forme d'un problème de Cauchy, et F la fonction solutions exacte dans le cas d'un problème de Cauchy satisfaisant aux conditions d'existence et d'unicité de la solution ,en particulier dans les situations où la solution exacte de l'ED est accessibles algébriquement et où il est demandé de la comparer avec celle d'Euler. Les confusions entre les variables mathématiques et les varaibles informatiques à partir des représentations sémiotiques qui les véhiculent sont souvent à l'origine des difficultées rencontrées par les étudiants (Brinsi, 2020, Ben Nejma et Brinsi, 2021, 2022)

5. ENJEUX SEMIOTIQUES LIES A LA METHODE D'EULER

Dans la mise en œuvre de la méthode d'Euler, nous identifions trois registres de représentations sémiotiques impliqués dans la résolution.

-Le registre numérique (RN) : ce sont les tableaux de valeurs, ou valeurs isolées, qu'elles soient expérimentales ou calculées ;(valeurs numériques approchées des termes de la suite d'Euler)

-Le registre symbolique, formel (RS) : ce sont les expressions mathématiques, les ostensifs mobilisés, les variables affectées au niveau des algorithmes. On peut par exemple différencier le registre algébrique des registres fonctionnel et celui des algorithmes. Le registre algébrique présente deux aspects : le discret et le continu, le caractère « continu » est celui pour lequel la fonction est définie en tant que « solution d'un problème de Cauchy » (définie par l'expression de sa dérivée et de sa valeur en un point). Le caractère discret correspond à la suite construite à l'aide de la formule d'Euler.

- Le registre graphique (RG) : ce sont les courbes représentatives des fonctions solutions des ED.

La technique d'Euler requière non seulement des conversions entre ces différents registres mais également une certaine flexibilité dans le passage d'un environnement de travail à un autre. Nous identifions trois types de tâches permettant d'accomplir cette technique. La première étape, réalisée dans l'environnement papier crayon, consiste à construire une suite de points à partir de l'équation différentielle (suite d'Euler), il s'agit d'un passage du continu au discret dans le registre algébrique, ce qui constitue un saut conceptuel important. La deuxième étape renvoie à la détermination de la liste ou table de valeurs numériques des termes de la suite d'Euler. La troisième étape renvoie au passage du discret au continu et permet d'obtenir la construction graphique de la solution d'Euler qui se présente comme une fonction affine par morceaux. Pour ces deux étapes de la résolution, il est plus efficace de recourir à un outil informatique comme Maple qui permet d'effectuer le calcul des valeurs numériques des termes de la suite de construire une ou plusieurs courbes approchées et de les superposer sur un même graphique. Cette résolution numérique permet par exemple de déterminer la solution exacte d'une différentielle résolue algébriquement en superposant sa courbe « exacte » avec des courbes approchées obtenues grâce à différentes valeurs du pas h. on pourra à partir de l'écart entre les différentes courbes et celle exacte constater l'effet du pas choisi (ou du nombre de subdivision de l'intervalle d'étude). Elle permet par ailleurs de trouver les solutions d'équations différentielles dont les techniques algébriques s'avèrent complexes ou impossibles à trouver à la main. Le tableau suivant synthétise les étapes requises dans les deux environnements en fonction de la nature des registres sémiotique mobilisés dans chacun.

Environnement papier- crayon		Environnement Maple	
Etape1		Etape2	Etape3
Registre algébrique continu	Registre algébrique discret	Registre numérique	Registre graphique
Equation différentielle $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y' = f(x,y) \end{cases}$	Suites numériques $x_k = x_0 + k.h$ $y_{k+1} = y_k + h.f(x_k, y_k)$	Liste des valeurs numériques approchées des x_k *et des* y_k	Courbe des points isolés discrets $M_k(x_k, y_k)$ Courbe polygonale reliant les points $M_k(x_k, y_k)$

Tableau 1. *Les registres de représentations sémiotiques impliqués dans la méthode d'Euler dans les environnements classiques et informatiques (Brinsi, 2020)*

6. LA DOUBLE TRANSPOSITION DE LA METHODE D'EULER : UNE ANALYSE DIDACTIQUE

La méthode d'Euler ne figure pas parmi les outils de résolution approchée, regroupés au sein de la bibliothèque « Maple » de traitement des équations différentielles « DEtools » et nécessite une résolution algorithmique sur la base du travail mathématique. Cet algorithme permettra à travers une résolution informatique de calculer les valeurs des x_k et des y_k et de construire la courbe polygonale « d'Euler ».Ainsi la résolution numérique d'une EDL par la méthode d'Euler dans l'environnement Maple n'est autre qu'une *résolution d'un problème mathématique en vue de sa programmation* (Briant, Bronner, 2015) qui exige une double transposition dans laquelle les trois types de résolution sont impliqués**:** la résolution mathématique, la résolution algorithmique et la résolution informatique. La résolution mathématique consiste à la mise de l'EDL en question sous forme d'un problème de Cauchy, déterminer la suite d'Euler relative à l'EDL en question il s'agit de préciser le pas de discrétisation h, le nombre de pas et de définir les relations de récurrence permettant les calculs des termes des suites d'Euler $(x_k)_{0\leq k\leq N}$ et $(y_k)_{0\leq k\leq N}$ c'est le « programme mathématique».La résolution algorithmique consiste à transposé ce programme mathématique en un algorithme (Algorithme d'Euler) c'est la première transposition. Ce dernier doit subir à son tour une deuxième transposition (transposition informatique) en un programme informatique exécutable par le logiciel de calcul symbolique en jeu. Dans le cas du logiciel « Maple », celle-ci peut être réalisée avec plusieurs techniques, dont l'une est la suivante :

```
>  N  :=...  ;  le nombre de pas T  :=...  ;  durée de la simulation ;
h:=evalf((T/N);le pas de discrétisation x0:=...; y0:=...; la condition initiale
f:=(x,y)-> ... ;
> x[0]:=x0;y[0]:=y0;
> for i from 0 to N-1 do:
x[i+1] := x[i] + h:
y[i+1] :=evalf( y[i] + h *f(x[i],y[i])):
od ;
```

L'exécution de ce programme permet de calculer les valeurs numériques des x_k et des y_k pour différentes valeurs de k=0,1,2….,N, et les afficher en liste ou les mémoriser sans les afficher selon que la boucle « for » est fermée par un point-virgule « ; » ou deux-points « : »

La technique relative à la construction de la courbe d'Euler (courbe polygonale reliant les points $M_i(x_i, y_i)$,$0 \leq i \leq N$, et dont les sommets sont visibles) exige une technique qui met en œuvre réunit quatre types de tâches :

T1 : Déclarer la liste des coordonnées des points « > **L :=[[x[k],y[k]]$k=0..N];)**

T2:Construire C1: la courbe polygonale reliant les points«> **plot(L, color =….) ; »**

T3 : Construire C2 : les points isolés « > **plot(L ,style = point, color=…); »**

T4 : superposer C1 et C2 « > **display(C1,C2) ; »**

Nous résumons ces trois types de résolutions impliquées dans le cas de la résolution numérique d'une équation différentielle du premier ordre par la méthode d'Euler, en vue de sa programmation avec Maple dans le tableau suivant :

Résolution mathématique | **Résolution algorithmique** | **Résolution informatique**

ED du premier ordre avec condition initiale dont la solution existe sous certaines conditions	Suite d'Euler relative à l'ED	Algorithme d'Euler relative à l'ED Boucle « for »	Programme de calcul des termes de la suite d'Euler relative à l'ED, implémenté par la boucle « for »
Approcher par la méthode d'Euler la solution de l'ED : $(E): \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ Sur l'intervalle : $[x_0, x_0 + T]$	-Choisir N le nombre de pas de discrétisations de l'intervalle $[x_0, x_0 + T]$ et définir le pas de discrétisation : $h = T/N$ -Définir les suites d'Euler : $\begin{cases} x_0 = x_0 \\ x_{k+1} = x_k + h \end{cases}$ $\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{k+1} = y_k + h.f(x_k, y_k) \end{cases}$	Initialisation des données T,N et h Initialisation des conditions initiales $x = x_0$;$y = y_0$ Tant que $x \leq T$; faire a-calcul de k = f(x, y); b-y = y + k * h $x = x + h$ c-enregistrer les données	$T := \cdots ; N := \cdots ;$ $h := \frac{T}{N} ; x := x_0 ;$ $y := y_0$ For i from 0 to N-1 do ; K=f(x,y); Y=y+h*k X=x+h; od ; print(x, y) ;

1ière transposition → **2ième transposition** →

Tableau 2 *– La double transposition dans la résolution numérique d'une EDL par la méthode d'Euler (Brinsi, 2020).*

7. CONCLUSION

L'objet de cette intervention est de fonder une réflexion didactique sur les enjeux à la fois épistémologiques et sémiotiques liés à la résolution numérique des équations différentielles dans un cadre d'enseignement particulier qui met en jeu deux disciplines mathématique et informatique, dans une interaction entre les environnements papier-crayon et informatique. Nous avons mis en lumière les difficultés qui peuvent être rencontrées par les étudiants pour modéliser un problème en lien avec ce thème d'étude. Ces difficultés peuvent se situer à plusieurs niveaux de la transposition aussi bien mathématique qu'algorithmique puis informatique. Des obstacles conceptuels peuvent apparaitre lors des conversions entre registres ou dans la gestion des deux environnements. La distinction entre les variables mathématiques et les variables informatiques est le plus souvent une compétence interdisciplinaire à développer dans l'enseignement. Nous avons vu que dans le cas de la méthode d'Euler, la maitrise des concepts mathématiques en jeu est un élément clé pour appréhender la technique et les défis posés par les approches numériques de résolution des équations différentielles en général. Or souvent les étudiants s'en tiennent à des manipulations de l'outil informatique en exécutant un algorithme institutionnalisé qu'ils ont tout simplement appris par cœur sans se soucier des fondements épistémologiques de la technique et des concepts en jeu. Il nous semble que la gestion des praxéologies mixtes dans un environnement interdisciplinaire est un projet institutionnel d'une grande envergure qui ne se limite pas à la seule volonté d'intégrer l'outil informatique dans des apprentissages mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE, M. (1989). Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles du premier cycle universitaire, *Cahier du séminaire de Didactique des Maths et de l'Informatique de Grenoble*, IMAG, pp.183-209

ARTAUD, M. (2003). Analyser des praxéologies mathématiques et didactiques ”à calculatrice” et leur écologie. Juin 2003, Reims, France. Edutice-00001315

BEN NEJMA S. et BRINSI, L. (2021). The introduction of digital resources in higher institutions of technological studies: the resolution example of differential equations in Maple environment. *International Journal of Innovation Scientific Research and Review*. IJISRR. ISSN.2582-6131-Vol. 03, Issue, 11, (PP.1987-1993).

BEN NEJMA, S. et BRINSI, L. (2022). La résolution des équations différentielles dans un environnement informatique- Mathematice- Revue *Sesamath*. Vol 78- Article 1472-http://revue.sesamath.net/spip.php?

BEN NEJMA, S. et JABRANE, A. (2023, *à paraitre*). Les équations différentielles : du savoir savant au savoir apprêté par les enseignants de mathématiques dans le contexte tunisien. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Grenoble- La Pensée Sauvage.

BRIANT, N. et BRONNER, A. (2015). Étude d'une transposition didactique de l'algorithmique au lycée : une pensée algorithmique comme un versant de la pensée mathématique : *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage,* (p. 231-246). In Theis L. (Ed.) Actes du colloque EMF2015 – GT3.

BRINSI, L. (2020). *La résolution numérique des équations différentielles dans un environnement informatique en première année d'université : pratiques enseignantes et genèse instrumentale des étudiants*. Master de recherche en didactiques des mathématiques. -ISEFC-Université virtuelle de Tunis.

CHEVALLARD, Y. (1998). Organisations didactiques : Les cadres généraux. *Notice du Dictionnaire de Didactique des Mathématiques 1997-1998 pour la formation des élèves professeurs de mathématiques.*

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives 5*. 37-65.

MALONGA, F. (2008). *Interactions entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire en France. Cas des équations différentielles du premier ordre,* Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (paris 7).

MODESTE, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* Thèse de doctorat, Université de Grenoble.

SAGLAM, A. (2004). *Les équations différentielles en mathématiques et en physique: étude des conditions de leur enseignement et caractérisation des rapports personnels des étudiants de première année d'université à cet objet de savoir,* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Enseignement-apprentissage de la Statistique : une approche pour appréhender une situation complexe

Khadidiatou Gueye
Sounkharou Diarra
Moustapha Sokhna
Université Cheikh Anta DIOP de Dakar

RÉSUMÉ

Cette contribution fait le résumé d'une recherche en cours qui porte sur l'apprentissage de la Statistique vue comme une activité mathématique qui jette les ponts entre la gestion du quotidien et la complexité du futur. Elle s'inscrit ainsi dans les travaux du groupe de travail 1 du colloque ADIMA3 dont le thème est : « Approche interdisciplinaire dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : quels projets et quels enjeux pour l'Afrique ? ». L'étude s'appuie sur une approche anthropologique du didactique et les éléments de réponses proposés pour consolider les activités des ponts montrent que l'enseignement et l'apprentissage de la Statistique apparaissent comme un outil puissant pour appréhender, en tant que citoyen, un monde de plus en plus complexe.

Mots-clés : Statistique ; monde complexe ; faire des mathématiques ; interdisciplinarité; citoyenneté.

1. INTRODUCTION

Le monde contemporain est de plus en plus envahi par des chiffres, des données tellement complexes qu'une personne non avertie pourrait rencontrer des difficultés à les comprendre (Girard, 2010). Pour étudier ces données complexes, il serait bien de disposer d'outils qui permettent successivement de les simplifier, de les résumer et de faciliter leur compréhension. Nous pensons que ces outils peuvent être trouvés dans le domaine des mathématiques. En effet, parmi les parties des mathématiques, il y en a une qui semble pouvoir expliciter et aider à appréhender les liens entre les problèmes sociaux et économiques : il s'agit de la Statistique. Au cœur de cette discipline, se trouvent les études sur le résumé, le classement, le rangement et l'interprétation de données (série statistique) actuelles pour interroger le futur.

Le résumé d'une série statistique se fait grâce à des paramètres de tendance centrale et des paramètres de dispersion. Ces paramètres sont aussi importants les uns que les autres (Vermette, 2018). Toutefois, les paramètres de tendance centrale sont le plus souvent insuffisants pour décrire une série statistique. Par exemple, un chef d'établissement choisit les deux meilleurs élèves de son école, Rama et Abou, et décide de présenter le plus performant d'entre eux à un concours général. Il relève les notes que Rama et Abou ont obtenues dans les huit (08) matières sur lesquelles ils ont été évalué. Les séries statistiques SR et SA suivantes représentent les notes respectives de Rama et Abou pour l'ensemble des huit (08) matières.
SR : 10; 11; 12; 15; 15; 16; 16; 17.
SA : 11; 11; 13; 14; 15; 15; 16; 17.

Pour faire son choix, le chef d'établissement calcule la moyenne arithmétique (aussi appelée moyenne dans ce document) des notes de chaque élève et voit que Rama et Abou ont la même moyenne égale à 14. Devant une telle situation, il est impossible de se fier à la moyenne des notes pour désigner l'élève le plus performant d'où la nécessité de recourir à d'autres paramètres plus adéquats pour faire le choix. Ces derniers paramètres sont les paramètres de dispersion. Parmi ces derniers, le plus utilisé pour décrire une série statistique est l'écart type.

L'écart-type est un concept qui, au Sénégal, figure dans les programmes d'enseignement de mathématiques du secondaire. Il permet de mesurer l'éloignement des données par rapport à leur moyenne arithmétique. Cependant, dans une situation d'enseignement-apprentissage, son interprétation pour comprendre des situations complexes est généralement problématique (Vermette, 2016, 2018 ; Mathews et Clark, 2007; Del Mas et Liu, 2005). En effet, dans leurs enseignements, les enseignants mettent l'accent sur le calcul de l'écart type et négligent, le plus souvent, son interprétation ou l'explication de son sens (Del Mas et Liu, 2005).

Ainsi, nous nous posons la question de savoir quelle méthode d'enseignement de l'écart type favoriserait l'acquisition de ce concept chez les élèves ?

Nous faisons l'hypothèse qu'un tel enseignement est celui où l'élève joue le rôle de statisticien (Brousseau, 2003) et travaille sur des données réelles issues d'une situation complexe.

C'est ainsi que dans cet article, nous présentons une analyse de praxéologie d'enseignement du concept d'écart-type, pour montrer comment la Statistique peut nous aider à comprendre une situation complexe.

Pour apporter des éléments de réponse à notre question de recherche, nous avons sollicité la collaboration d'un professeur de mathématiques de l'enseignement secondaire pour faire l'expérimentation dans sa classe de seconde scientifique. Nous lui avons expliqué notre attente à savoir qu'il doit s'inspirer d'une situation réelle pour enseigner la notion d'écart type à ses élèves et lui avons proposé d'explorer l'idée du don de sang. Après avoir proposé le projet au professeur, nous l'avons suivi depuis la planification de l'enseignement de l'écart type jusqu'à sa prestation dans la classe. Nous avons fait une analyse *a priori* de l'activité qu'il a élaborée et une analyse *a posteriori* de sa prestation.

Dans ce qui suit, nous exposons d'abord la problématique de l'enseignement et de l'apprentissage de la Statistique : il s'agit surtout de montrer, à travers une revue de littérature, l'importance de la Statistique et les enjeux de son enseignement (§ 2). Puis, nous présentons des éléments de la théorie anthropologique du didactique de Chevallard (1998) que nous avons utilisés dans notre travail (§ 3). Ensuite, nous présentons l'analyse que nous avons faite de l'étude expérimentale menée par le professeur (§ 4, 5 et 6). Nous terminons, enfin ce document, par une conclusion dans laquelle nous faisons la synthèse du travail réalisé (§ 7).

2. LES ENJEUX D'UNE FORMATION À LA STATISTIQUE

L'intérêt et l'utilité de l'enseignement et de l'apprentissage de la Statistique ne sont plus à démontrer et ont fait l'objet de nombreuses études didactiques. En effet, la formation à la Statistique est nécessaire pour comprendre l'actualité (Kahane, 2002; Chevallard et Wozniak, 2003 ; Girard, 2005). Elle permet aux apprenants de développer une pensée critique, un mode de raisonnement inductifs, et de participer aux débats (Gattuso, 2011). L'objectif d'une telle formation est surtout la maitrise de la littératie statistique car « nos vies sont gouvernées par les nombres. Tous les bacheliers devraient être capables d'utiliser de façon appropriée le raisonnement statistique pour faire face intelligemment aux questions de citoyenneté, de l'emploi, de la famille et pour être préparés à une vie en bonne santé, heureuse et productive. » (Fine, 2013).

Pour atteindre cet objectif, l'aptitude à interpréter les données statistiques devrait être développée chez les apprenants puisqu'elle semble primordiale en Statistique. D'ailleurs, selon Regnier (2005), interpréter c'est d'abord rendre clair, c'est ensuite donner du sens en intégrant dans un contexte, c'est enfin jouer de façon personnelle. Il apparait alors que la compréhension des concepts de la Statistique est fondamentale pour pouvoir faire une bonne interprétation des informations statistiques.

Au-delà de l'enseignement des algorithmes de calcul, l'enseignement de la Statistique ne doit pas s'éloigner de l'activité du statisticien qui, selon Chevallard et Wozniak (2003), devant son objet d'étude est tenu d'interroger la réalité de la société dans laquelle il évolue. Ces auteurs soutiennent que la clef du travail statistique c'est la formulation d'un problème, la définition d'une population, la définition d'un plan d'échantillonnage, la constitution d'échantillons, le calcul de paramètres statistiques et le test d'hypothèse. Cette même idée est avancée par Brousseau (2003). Cependant, certaines études montrent que les enseignants inhibent le travail du statisticien dans leurs enseignements et s'intéressent plutôt aux aspects modélisation et simulation en proposant à leurs élèves des données déjà construites et disponibles dans une quelconque institution, ou tout simplement des données fictives (Gattuso, 2011 ; Girard, 2005, 2010).

Malgré toutes ces difficultés, la formation à la Statistique reste essentielle pour tout citoyen.

Après avoir décrit brièvement les enjeux d'une formation à la Statistique, nous exposons dans la section qui suit, quelques outils du cadre théorique que nous utilisons pour analyser l'étude expérimentale présentée dans ce document.

3. Cadre théorique

Dans cette partie, sont décrits les outils théoriques sur lesquels s'appuient l'étude et l'analyse d'une situation d'enseignement-apprentissage de l'écart type. Ces outils sont la théorie anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard, 1998). Selon la TAD, « toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot de praxéologie ». La TAD situe l'activité mathématique et l'activité d'enseignement des mathématiques dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales. Toute activité humaine consiste à effectuer une tâche t relevant d'un type de tâches T donné à l'aide d'une technique τ justifiée par une technologie θ qui à son tour est justifiée par une théorie Θ. Cette organisation du savoir appelée praxéologie permet de modéliser l'activité humaine, en général, et l'activité mathématique, en particulier (*Opus* cité).

Chevallard (1998) précise qu'il y a deux types d'objets relatifs aux pratiques enseignantes devant l'étude d'un thème : la réalité mathématique qui peut se construire dans une classe de mathématiques où l'on étudie le thème en question, encore appelée praxéologie mathématique ou organisation mathématique et la manière dont peut se construire cette réalité mathématique, dénommée organisation didactique. Analyser une pratique enseignante revient donc à analyser l'organisation mathématique et l'organisation didactique. Pour étudier l'organisation didactique, nous allons analyser les six moments didactiques successifs suivants, décrits par Chevallard (1998) : le moment de la première rencontre avec l'organisation mathématique OM_θ*;* le moment de l'exploration d'un type de tâches T_i et l'élaboration d'une technique τ_i qui permet à l'élève de recueillir les données; le moment où l'élève essaie de constituer un environnement technologico-théorique relatif à la technique τ_i; le moment où l'élève travaille la technique τ_i; les moments de l'institutionnalisation et de l'évaluation.

À présent, nous décrivons le contexte de l'étude expérimentale et faisons l'analyse *a priori* de cette dernière.

4. CONTEXTE DE L'ÉTUDE ET ANALYSE *A PRIORI*

L'étude, que nous décrivons ici, s'est déroulée au Sénégal vers la fin du second semestre de l'année scolaire 2018/2019 mais les données traitées sont celles de l'année 2018.

Au Sénégal, c'est la Statistique descriptive qui est enseignée dans les cycles moyen et secondaire de l'enseignement général. Les concepts de la Statistique descriptive tels que le mode, la moyenne arithmétique, la médiane, les diagrammes et les histogrammes sont enseignés au cycle moyen entre la quatrième (13-14 ans) et la troisième (14-15 ans). Les paramètres de dispersion tels que la variance, l'écart type, l'étendue, l'écart interquartile, sont enseignés en seconde (15-16 ans). La Statistique descriptive à deux variables est enseignée en première (16-17 ans) et en terminale (17-18 ans).

Dans le cadre de notre recherche, un enseignant de mathématiques du secondaire, a accepté[1] de mener l'étude dans sa classe de seconde scientifique. Nous décrivons le processus de cette étude dans les lignes suivantes. Un professeur de mathématiques qui désire enseigner la Statistique à ses élèves en classe de seconde scientifique, consulte d'abord le programme de Statistique de cette classe et voit qu'en introduction, les rédacteurs des programmes suggèrent aux enseignants, entre autres, de proposer aux élèves des données réelles, tirées des disciplines scolaires ou de leur environnement socio-économique. En effet, d'après ce programme, l'outil que les autres disciplines font de la Statistique « donne l'occasion d'initier un fructueux travail d'interdisciplinarité. Cela permettra d'utiliser des données réelles tirées des disciplines scolaires ou de l'environnement socio-économique de l'élève ». Le professeur regarde, ensuite, le contenu du programme et voit que les nouvelles connaissances que les élèves doivent acquérir dans cette partie sont relatives à deux paramètres de dispersion à savoir la variance et l'écart-type puis, il note les trois compétences exigibles suivantes de cette partie.

- ✓ Connaitre le vocabulaire des paramètres de dispersion : variance et écart-type.
- ✓ Calculer ces paramètres de dispersion.
- ✓ Interpréter ces paramètres pour analyser une série statistique.

Après la lecture du programme de la classe de seconde scientifique, le professeur réfléchit sur un problème qui porterait sur des données réelles et qu'il pourrait proposer à ses élèves afin d'atteindre les objectifs spécifiques visés. Il commence alors à s'interroger sur des questions qui touchent l'environnement social, culturel et/ou économique des élèves et dont l'étude mènerait à la découverte des formules de la variance et de l'écart-type et l'appropriation de leur sens.

Le vendredi 14 juin 2019, le professeur écoute l'émission « priorité santé » sur Radio France International (RFI) et entend l'information suivante :

« Au Sénégal, nous sommes environ 15 millions d'habitants et au cours de l'année 2018 nous avons enregistré environ 98 000 donneurs de sang…. La moitié de ce que nous avons prélevé vient de Dakar, l'autre moitié est répartie dans les autres régions… » dit le directeur du centre national de

[1] L'enseignant a fait cette leçon sur notre demande et il a convoqué ses élèves en dehors de leurs heures de cours (en fin d'année après les compositions du second semestre). En effet, il devait suivre une progression harmonisée proposée par l'inspection d'académie à laquelle dépend son établissement et le thème « STATISTIQUE » est placé à la fin de cette progression. L'enseignant n'a pas eu le temps de faire le thème « STATISTIQUE » en classe jusqu'à la fin de l'année scolaire. L'expérimentation s'est déroulée le 19/06/2019.

transfusion sanguine (CNTS) de Dakar dans l'émission « priorité santé » sur RFI, le vendredi 14 Juin (journée mondiale du donneur de sang).

4.1 Première rencontre avec le type de tâches

Après réflexions, le professeur décide de s'intéresser au don de sang comme c'était convenu avec les chercheurs car *c'est une question sociale qui interpelle tout être humain* et ce sera, pour lui, l'occasion de montrer à ses élèves le lien entre la Statistique et la vie sociale.

Le professeur commente l'information avec les quarante-six (46) élèves de sa classe de seconde scientifique et leur demande de s'organiser par groupe de quatre (04) élèves et que chaque groupe liste les différentes questions qui l'intéressent sur le don de sang et auxquelles ils aimeraient apporter une réponse.

Les élèves se sont constitués en onze (11) groupes dont neuf (09) groupes de 4 élèves chacun et deux (02) groupes de cinq (05) élèves chacun. Chaque groupe propose une liste de questions que l'enseignant a examinées avec soin. Certaines questions renvoyaient à une même idée générale. Nous en rapportons quelques-unes : *quel est le groupe sanguin le plus fréquent ? Quelles sont les conditions pour donner de son sang ? À partir de quel âge peut-on donner de son sang ? Cela fait-il du mal de donner de son sang ? Pourquoi le centre national de transfusion sanguine organise souvent des activités de don de sang*[2] *? Comment se passe le don de sang ? Y a-t-il assez de donneurs de sang au Sénégal ? Est-ce que les populations donnent souvent de leur sang? Quel est le groupe sanguin le plus fréquent ? …*

L'enseignant retient les questions qui lui semblaient les plus pertinentes et qui revenaient le plus souvent. La question à laquelle il s'attendait et qui pourrait conduire les élèves à l'écart type n'étant pas apparue explicitement dans la liste des questions précédentes, l'enseignant a fait une synthèse pour proposer aux élèves la question (Q) suivante.

(Q) : en 2018, comment les nombres des donneurs de sang des différentes régions du Sénégal se sont-ils situés par rapport à la moyenne nationale des donneurs ?

Nous précisons que c'est le professeur, lui-même, qui a formulé la question (Q) en s'inspirant des questions posées par les élèves. Ces derniers s'accordent sur (Q) et décident d'y apporter une réponse.

4.2 Analyse a priori de l'organisation mathématique

La tâche que le professeur souhaite faire rencontrer aux élèves relève du type de tâches « déterminer l'écart-type d'une série statistique à caractère quantitatif ». Pour effectuer une tâche relevant de ce type de tâches, la technique à appliquer est le calcul de l'expression $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}}$ où $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est une série statistique à caractère quantitatif[3], d'effectif n et de moyenne $\bar{X}$

Cette technique se justifie par la notion de distance euclidienne dans un espace vectoriel de dimension n. En effet, l'écart-type est considéré comme la « distance moyenne » entre les deux vecteurs X et $\bar{X}$ composés respectivement des n valeurs de la série statistique et de n valeurs égales à la moyenne nationale des donneurs de sang.

[2] Ici, il faut noter que le centre national de transfusion sanguine se trouve à Dakar, près de l'établissement dans lequel cette étude a été menée.

[3] Une série statistique à caractère quantitatif est une série statistique dont les données sont des nombres.

Si X et Y sont deux vecteurs à n composantes alors la distance euclidienne entre X et Y est

$$d(X;Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i)^2}$$

4.3 Analyse a priori de l'organisation didactique

Les élèves disposent de leur milieu matériel constitué des données qu'ils vont collecter et de la question (Q) à laquelle ils veulent répondre. Ils effectuent aussi des recherches sur le don de sang pour savoir que le nombre de donneurs de sang d'une localité est apprécié en fonction du nombre d'habitants de cette localité. Ils organisent les données collectées, calculent les ratios entre le nombre de donneurs enregistré dans chaque région et le nombre d'habitants de cette région puis la moyenne arithmétique de ces ratios. Après cette étape, ils explorent des techniques pour répondre à (Q). Ils peuvent adopter plusieurs stratégies.

1ère stratégie : Ils calculent l'écart entre chaque ratio et la moyenne. Ensuite, ils calculent la somme de ces écarts, la divisent par le nombre de régions et trouvent une valeur nulle. Cette valeur ne leur apporte aucune information alors ils réfléchissent sur un moyen d'éliminer les signes négatifs des écarts.

2ème stratégie : ils déterminent les valeurs absolues des écarts et calculent la moyenne de ces valeurs absolues.

3ème stratégie : ils calculent les carrés de chaque écart, font la somme des carrés, divisent cette somme par le nombre de régions et prennent la racine carrée du dernier résultat obtenu.

Les élèves justifieraient la stratégie 1 par la notion de moyenne arithmétique, la stratégie 2 par la notion de distance absolue et la stratégie 3 par la notion de distance euclidienne.

Dans cette analyse, nous faisons l'hypothèse que la stratégie gagnante est la première que nous avons décrite. Après avoir décrit le contexte de l'étude et fait une analyse *a priori*, nous présentons dans ce qui suit l'analyse *a posteriori* de l'expérimentation.

5. DESCRIPTION DE L'ÉTUDE ET ANALYSE *A POSTERIORI*: EXPLORATION DES TYPES DE TÂCHES ET ÉLABORATION DES TECHNIQUES, TECHNOLOGIES ET THÉORIES

Dans cette partie, nous faisons simultanément la description de l'étude menée par l'enseignant et l'analyse *a posteriori* de la situation d'enseignement-apprentissage de l'écart type.

Sur les onze (11) groupes de départ qui avaient posé des questions en rapport avec le don de sang, seuls six (06) groupes de quatre étaient présents le jour de l'expérimentation. Nous commençons l'analyse *a posteriori* par la phase de collecte de données.

La première technique des élèves fut d'aller au centre national de transfusion sanguine (CNTS) pour recueillir le nombre de donneurs de sang dans les différentes régions du Sénégal. Arrivés au CNTS, la personne chargée de la collecte des données au niveau national a mis à leur disposition le nombre de donneurs prélevés dans les différentes banques de sang du pays.

La deuxième technique des élèves fut de consulter le site de l'Agence Nationale de la Statistique et de la Démographie (ANSD) pour recueillir le nombre d'habitants de chaque région du Sénégal. Après la phase de collecte de données, les élèves ont calculé le nombre de donneurs de sang enregistrés dans chaque région. En effet, le Sénégal compte quatorze (14) régions et vingt-cinq

(25) banques de sang. Dans chaque région, il y a au moins une banque de sang. Puis, pour chaque région, les élèves ont calculé le nombre de donneurs de sang par mille (1000) habitants[4].

Après avoir effectué tous les calculs nécessaires les élèves se retrouvent avec le tableau ci-après, dans lequel sont organisées toutes les données recueillies.

RÉGION	**BANQUE DE SANG DE**	**NOMBRE DE DONNEURS PRÉLEVÉS PAR RÉGION (N1)**	**NOMBRE D'HABITANTS PAR RÉGION (N2)**	$\frac{\boldsymbol{N1}}{\boldsymbol{N2}} \times \mathbf{1000}$
1. Dakar	CNTS			
	Hôpital Principal	49 467	3630323	13,63
2. Diourbel	Touba (Matlaboul fawzeyni +Namatou)	10 075	1746492	5,77
	Diourbel			
3. Fatick	Fatick			
	Sokone	3096	841298	3,68
4. Kaffrine	Kaffrine	1849	678955	2,72
5. Kaolack	Kaolack			
	Nioro	5279	1120402	4,71
6. Kédougou	Kédougou	1512	178272	8,48
7. Kolda	Kolda	1556	772068	2,01
8. Louga	Linguère			
	Louga	2820	1004398	2,80
9. Matam	Ourossogui	1740	680087	2,56
10. Saint-Louis	St-Louis			3,53
	Ndioum	3655	1036003	
11. Sédhiou	Sédhiou	510	534646	0,95
12. Tambacounda	Bakel			
	Tambacounda	2823	812075	3,48
13. Thiès	Mbour			
	Tivaouane			
	Thiès (Régional)	10126	2049765	4,94
	St Jean (Thiès)			
14. Ziguinchor	Ziguinchor HOPITAL PAIX	3477	641253	5,42
	Ziguinchor HOP régional			

Tableau. *Données collectées et organisées*

Après avoir organisé les données, les élèves rencontrent quelques difficultés pour les exploiter afin d'apporter des éléments de réponse à la question (Q).

Ils demandaient que le professeur reformule (Q) pour une meilleure compréhension. Le professeur commence par rappeler la notion de distance entre deux points, puis reformule la question en ces

[4] Auparavant, le professeur avait échangé avec les élèves sur la notion de norme de donneurs de sang fixée par l'Organisation Mondiale de la Santé.

termes : quelle est la distance moyenne entre les deux points repérés respectivement par les nombres de donneurs dans les régions et la moyenne nationale annuelle des donneurs?

Malgré la reformulation de la question (Q), des groupes d'élèves ne parviennent toujours pas à la comprendre et n'ont pas réussi à effectuer la tâche.

Un groupe d'élèves a utilisé la stratégie 2 et un autre la stratégie 3 mais ils ont travaillé avec les nombres de donneurs par région. Autrement dit, ils n'ont pas utilisé les ratios $\frac{N1}{N2} \times 1000$.

Jusqu'à la fin de l'expérimentation, le professeur n'a pas pu institutionnaliser la séquence car les élèves ne parvenaient pas à trouver des éléments de réponse à (Q).

6. CONFRONTATION DES ANALYSES A PRIORI ET A POSTERIORI ET PROPOSITION D'UNE SOLUTION À L'ACTIVITÉ DE L'ENSEIGNANT

6.1 Confrontation des deux analyses

À la fin de l'expérimentation, nous pouvons dire qu'enseigner un concept statistique en amenant les élèves à jouer le rôle de statisticien devant un problème statistique conduit ceux-ci à s'approprier la question de l'étude et à appréhender le processus d'une étude statistique. Cependant, disposer des données réelles ne garantit pas nécessairement de trouver la réponse à une question statistique. En effet, les élèves travaillaient sur des données réelles qu'ils ont eux-mêmes recueillies et organisées mais ils ne savaient pas comment les exploiter pour apporter des éléments de réponse à leur interrogation. L'enseignant de son côté, n'avait aucun moyen de clarifier sa question pour qu'elle soit à la portée des élèves car les éléments qui justifient la nécessité de recourir à l'écart type n'étaient pas installés chez les élèves. Mieux, ces éléments ne figurent même pas dans les programmes d'enseignement de mathématiques. Sur ce, nous proposons ci-après, une solution qui pourrait aider à appréhender la complexité du don de sang

6.2 Proposition d'une solution à l'activité de l'enseignant

La solution que nous proposons dans cette sous-section s'appuie sur les informations rapportées par le professeur et les données collectées et organisées par les élèves.

D'après l'extrait de l'interview du directeur de la CNTS sur la RFI, rapporté par l'enseignant, en 2018, le nombre de donneurs de sang pour 1000 habitants au Sénégal est d'environ 6,5. La moitié des donneurs se trouve à Dakar et l'autre moitié dans les régions. La question qui se pose alors est : en 2018, en moyenne comment les taux des donneurs de sang des régions se sont-ils situés par rapport au taux moyen national ?

La position des taux des donneurs dans les régions par rapport au taux moyen national nous fait penser à la distance entre l'ensemble des taux des donneurs enregistrés dans les régions et le taux moyen national. Donc, nous devons calculer la moyenne arithmétique des taux puis la distance entre l'ensemble des taux des donneurs et cette moyenne.

Nous pouvons utiliser à cet effet deux distances : la distance absolue $\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{X_i} - \boldsymbol{Y_i}|$ et la distance quadratique moyenne $\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{X_i} - \boldsymbol{Y_i})^2$ où X et Y sont deux vecteurs à n composantes. La distance absolue permet de mesurer la position des données par rapport à leur médiane et la distance quadratique moyenne mesure l'éloignement des données par rapport à leur moyenne arithmétique. Or, nous voulons étudier la position des taux des donneurs de sang dans les régions par rapport au taux moyen national alors nous choisissons la deuxième distance qui est plus appropriée. Nous utilisons, ici, quelques éléments de la théorie des espaces vectoriels : ceci est l'environnement technologico-théorique de l'écart type non présent dans les ressources et les programmes de l'enseignement secondaire.

Appliquons ce principe aux données collectées par les élèves.

Nous calculons d'abord la moyenne arithmétique M des taux régionaux comme suit :

$$M = \frac{13{,}63 + 5{,}77 + 3{,}68 + 2{,}72 + 4{,}71 + 8{,}48 + 2{,}01 + 2{,}80 + 2{,}56 + 3{,}53 + 0{,}95 + 3{,}48 + 4{,}94 + 5{,}42}{14}$$

$M = 4{,}62$.

Ensuite, nous calculons la distance moyenne d des taux par rapport à M.

$d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{14}(X_i - 4{,}62)^2}{14}} = 3{,}08$ où $X = (13{,}63;\ 5{,}77;\ 3{,}68;\ 2{,}72;\ 4{,}71;\ 8{,}48;\ 2{,}01;\ 2{,}80;\ 2{,}56;\ 3{,}53;\ 0{,}95;\ 3{,}48;\ 4{,}94;\ 5{,}42)$.

6.3 Interprétation.

Si nous rapportons le nombre de donneurs de sang au Sénégal à l'effectif de la population alors nous trouvons qu'au Sénégal, en 2018, il y avait environ six donneurs de sang pour chaque mille habitants. Mais en regardant la situation de plus près, nous voyons qu'en réalité les taux des donneurs de sang tournent autour de quatre pour mille, environ : c'est l'interprétation du taux moyen national.
Par ailleurs, il y a environ une différence moyenne de trois donneurs entre le taux de chaque région et le taux moyen national; cette différence est assez petite par rapport aux taux des donneurs. Nous pouvons en déduire que les taux des donneurs régionaux varient approximativement entre un et sept donneurs pour mille. Et, en regardant le tableau des données organisées, nous voyons clairement que onze régions sur quatorze soit environ 78,57% ont un taux appartenant à cet intervalle. Les taux des régions de Dakar, Sédhiou et Kédougou sont exclus de cet intervalle. Donc, dans l'ensemble, les taux des donneurs de sang sont plus proches de quatre pour mille que de six pour 1000. Ainsi, au lieu de dire qu'il y a environ six donneurs de sang sur 1000 habitants, il serait possible d'annoncer qu'au Sénégal, il y avait environ quatre donneurs de sang sur mille habitants en 2018 avec une précision (écart type) de trois donneurs sur 1000 habitants. Par conséquent, en moyenne, la distance moyenne entre les taux régionaux des donneurs de sang au Sénégal et le taux moyen national était d'environ trois donneurs en 2018. Cette distance moyenne est appelée écart type. Dans ce contexte, l'écart type est « l'erreur moyenne[5] » commise en représentant l'ensemble des taux régionaux des donneurs de sang par leur moyenne arithmétique.

7. CONCLUSION

L'étude que nous venons de décrire montre que la Statistique est une partie des mathématiques dont les outils peuvent servir à appréhender les phénomènes complexes de la vie sociale. Parmi ces outils, celui que nous avons exploré en collaboration avec d'autres personnes (enseignants ou pas) est l'écart type. L'écart type permet d'établir des intervalles de confiance et d'éclairer certaines informations mais c'est un concept problématique. Établir sa formule est une tâche fastidieuse dans l'enseignement secondaire. Il en est de même pour son interprétation dans l'absolu. En effet, nous avons noté l'absence de la constitution d'un environnement technologico-théorique lors de l'expérimentation.
Cette étude interpelle les concepteurs des programmes à deux niveaux. (1) les concepts de la Statistique à enseigner sont importants et intéressants mais des pistes devraient être explorées pour

[5] L'erreur moyenne est différente de la moyenne arithmétique des erreurs.

faciliter leur interprétation qui est un objectif d'enseignement. (2) La théorie derrière certains concepts statistiques comme l'écart type mérite d'être éclairée dans les manuels afin de faciliter l'acquisition de ces concepts par les enseignants et par les élèves. Montrer l'utilité des concepts à travers d'exemples concrets est certes important mais faire connaitre la théorie pour éclairer ceux-ci, l'est encore plus. Ceci est un véritable défi à relever. En effet, ce qui est intéressant dans le problème mathématique, ce n'est pas le fait qu'il soit utile, mais qu'il fait sens pour l'élève et pour cela ***le défi est plus fondamental que l'utilité***. (Bkouche et al, 1993).

BIBLIOGRAPHIE

BKOUCHE, R.; CHARLOT, B. et ROUCHE N. (1993). *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*. Armand Colin, Paris, ISBN 2-200-37262-0.

BROUSSEAU, G. (2003). Enseigner la statistique au secondaire. Entre genre prochain et différence spécifique. *Balises pour la didactique des mathématiques* pp. 165-194, Grenoble: La Pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. Consulté sur http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf

CHEVALLARD, Y. et WOZNIAK, F. (2003). Enseigner la statistique au secondaire. Entre genre prochain et différence spécifique. *Balises pour la didactique des mathématiques* pp. 195-208, Grenoble: La Pensée sauvage.

DEL MAS, R. et LIU, Y. (2005). Exploring students'conceptions of the standard deviation. *In Statistics Education Research Journal*, vol. 4, pp. 55–82. International Association for Statistical Education (IASE/ISI).

DODGE, Y. (1993). *Statistique: dictionnaire encyclopédique*. Suisse : Université de Neuchâtel.

FINE, J. (2013), Le rapport GAISE (U.S.) : cadre d'un curriculum statistique de la maternelle à la terminale, *Statistique et Enseignement*, 4(1), pp. 25-54, consulté sur : http://www.statistique-et-enseignement.fr, le 26/02/2019.

GATTUSO, L. (2011). L'enseignement de la statistique: où, quand, comment, pourquoi pas?, *Statistique et Enseignement*, 2(1), pp. 5-30, consulté sur http://www.statistique-et-enseignement.fr/ojs/ , le 08/04/2019.

GIRARD, J. C. (2005), Pourquoi est-il si difficile d'enseigner la statistique?, *Statistique au lycée. Vol. 1: Les outils de la statistique*, pp. 13-22.

GIRARD, J. C. (2010), Statistique et formation du citoyen, *Stage ATSM, IREM de Lyon*, 2 septembre 2010.

KAHANE, J. P. et al. (2002). L'enseignement des sciences mathématiques : rapport d'étape Statistique et probabilités; éditions Odile Jacob.

MATHEWS, D. et CLARK, J. (2007). Successful students' conceptions of mean, standard deviation, and the Central Limit Theorem. In *Conference on Teaching Statistics*. Oshkosh. Consulté sur http://www1.hollins.edu/faculty/clarkjm/stats1.pdf

REGNIER, J. C. (2005). *Conférence séminaire de didactique des mathématiques*, janvier 2005.

VERMETTE, S. (2016). L'écart-type : au-delà de l'algorithme, *Bulletin AMQ*, Vol. LVI, n°1, mars 2016, pp. 11-24.

VERMETTE, S. (2018), Les connaissances d'enseignants du secondaire sur les concepts d'écart type et d'écart moyen, *Statistique et Enseignement*, 2(1), pp. 3-21, http://www.statistique-et-enseignement.fr

WOZNIAK, F. (2005). *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. Un repérage didactique.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon.

L'évolution de l'enseignement des équations différentielles dans le contexte tunisien : vers une approche interdisciplinaire

Anis Jabrane
Université Virtuelle de Tunis-ISEFC-Tunisie
Sonia Ben Nejma
Université de Carthage- FSB- Tunisie

RÉSUMÉ

L'histoire de l'enseignement des équations différentielles dans le système éducatif tunisien a connu trois approches évoluant d'une approche fonctionnelle vers une approche par la modélisation en passant par les équations. Bien que cet objet de savoir soit un outil fort puissant de modélisation suggéré par la dernière réforme du curriculum, peu de place lui est accordée dans les pratiques d'enseignement et d'évaluation. Cette réflexion didactique remet en question la raison d'être de cette notion dans les programmes de mathématiques de terminale, les conditions de son enseignement ainsi que la cohérence du système d'évaluation. Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une étude plus approfondie sur les pratiques enseignantes relatives à la modélisation de problèmes contextualisés à l'interface des mathématiques et d'autres disciplines scientifiques (Ben Nejma, Jabrane, 2021, Jabrane, 2020) et prend appui sur la théorie anthropologique du didactique pour une analyse à la fois écologique et praxéologique des manuels officiels tunisiens au fil des réformes successives.

1. INTRODUCTION

L'enseignement des équations différentielles (ED) est souvent envisagé dans une perspective interdisciplinaire qui justifie la raison d'être de cette notion dans le cursus scolaire des élèves. Plusieurs travaux menés dans des contextes institutionnels variés pointent autant d'entrées possibles pour cette notion et les difficultés à l'installer dans une approche interdisciplinaire. Ainsi, dans le contexte français et depuis déjà plusieurs années, Artigue (1989) a souligné la prédominance de l'approche algébrique dans le domaine des mathématiques et l'a conduit à réfléchir sur la viabilité d'une autre approche, et plus particulièrement, celle de l'approche qualitative dans l'enseignement universitaire. Elle identifie ainsi des contraintes à la fois épistémologiques, cognitives et didactiques qui pèsent sur l'enseignement de cette notion. L'auteur caractérise cette approche par un enseignement très algorithmisé sans réel enjeu vu la réduction opérée, malgré l'importance mathématique du domaine et la genèse historique de cette notion. Pour sa part, Rodriguez (2007) met l'accent sur l'écart observé entre le contexte de modélisation dans lequel s'est développée la notion d'équation différentielle et le contexte d'enseignement. L'analyse menée sur les programmes et les manuels officiels dans ce contexte l'amène à conclure que dans la plupart des situations proposées aux élèves, l'étape de situation réelle est souvent placée dans le domaine pseudo-concret car les énoncés représentent déjà des modèles pseudo-concrets et les étapes de généralisation et de prévision sont quasiment absentes des pratiques institutionnelles et des pratiques d'enseignement. Dans le même sens, les travaux de Malonga (2008) révèlent que la notion d'ED est un outil nécessaire et efficace dans la résolution de problèmes intra- et extra-mathématiques et permet la construction d'un cadre personnel de rationalité commun aux deux disciplines, mathématique et physique. En absence d'un tel cadre personnel, l'élève est confronté à des obstacles à la fois sémiotiques et cognitifs l'empêchant de mobiliser des connaissances acquises en sciences physiques dans des activités en mathématiques et inversement. Nous nous proposons dans le cadre de cette intervention d'explorer les conditions d'émergence et d'évolution des ED dans l'histoire de l'enseignement tunisien d'autre part. Cette référence institutionnelle est un axe crucial de nos travaux (Ben Nejma 2009, 2010, 2012) puisqu'il s'agit d'étudier l'évolution de l'enseignement d'une notion mathématique au fil des réformes successives de l'enseignement tunisien. En effet, la notion d'ED a connu au fil des réformes tunisiennes des changements importants dont une nouvelle centration sur la pratique de modélisation de situations extra-mathématiques. Les cadres officiels de référence semblent suggérer des nouvelles formes des pratiques en faveur d'une approche interdisciplinaire et d'une dialectique renforcée entre les registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993).

2. PROBLÉMATIQUE

Des changements importants du savoir à enseigner autour des ED sont influencés par la genèse de cette notion et sa construction historique (Ben Nejma, Jabrane, 2019), d'autres concernent les organisations mathématiques développées et plus particulièrement les éléments technologiques qui accompagnent la résolution des équations différentielles de premier ordre et la résolution des problèmes contextualisés qui font référence à une variété de disciplines scientifiques (Physique, Biologie, chimie…). Par ailleurs, ce qui semble paradoxal, c'est l'absence pendant plusieurs années d'une évaluation des apprentissages liés à cet objet de savoir dans les évaluations nationales (baccalauréat scientifique toutes les sections), excepté l'épreuve de 2008 qui accorde une place minime dans le contenu proposé témoignant du peu d'importance accordé à cette notion malgré l'évolution de l'approche d'enseignement dans les programmes de mathématiques de la réforme actuelle (de 2004), comme nous pouvons le voir sur cet extrait

> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 1$ donc f est une solution de l'équation différentielle : a) $2y' = y + 2$ b) $y' = 2y + 2$ c) $y' = -2y - 2$

Figure 1. *Baccalauréat : session principale 2008, bac maths*

Les questions sont les suivantes : quelles sont les caractéristiques des rapports institutionnels aux équations différentielles développés au fil des réformes de l'enseignement secondaire tunisien ? Cette évolution va-t-elle dans le sens d'une centration sur cet objet de savoir ou plutôt d'une dégradation progressive des praxéologies développées ? Quelle est la place de la modélisation ? Quelle est la place de la composante interdisciplinaire dans l'enseignement des équations différentielle en dernière année de lycée ?

3. CADRE THÉORIQUE

Pour répondre aux questions de recherche posées, nous situons ce travail dans le cadre de la théorie anthropologique de la didactique à travers l'étude du processus de transposition didactique externe du savoir savant au savoir à enseigner (Chevallard, 1999). Cette approche permet de modéliser ces pratiques en termes de praxéologies ou d'organisations mathématiques et didactiques tout en s'interrogeant sur le rapport au savoir et les conditions de sa viabilité dans une problématique écologique. Ainsi, deux dimensions d'analyse du savoir à enseigner sont abordées dans ce travail, une dimension écologique (Rajoson, 1988, p. 35) et une dimension praxéologique (Chevallard, 1991, 1999). La première permet de voir qu'un objet de savoir ne peut vivre indépendamment d'autres objets de savoir sans lesquels il n'a aucune raison d'exister.

Les équations différentielles sont étroitement liées à d’autres notions mathématiques telles que les fonctions primitives, dérivées, nombres complexes..., l’analyse écologique nous permet de caractériser leur évolution au fil des réformes successives à travers leurs habitats qui sont les lieux de vie de cet objet (l’environnement conceptuel) et les niches qui sont les fonctions ou rôles assignées dans le système d’objets avec lequel il interagit (Artaud, 1997, p112). La dimension est abordée via les prescriptions institutionnelles qui sont précisément à l’origine des évolutions curriculaires (Ben Nejma, 2009, 2010). Celle-ci est mise en pratique à partir du modèle des 4T (types de tâches, techniques, technologies et théories) et des niveaux de codétermination. Ces niveaux sont hiérarchiquement classés du plus spécifique au plus général : sujet, thème, secteur, domaine, discipline, pédagogie, école, société. Chaque niveau impose certaines contraintes aux niveaux plus profonds, alors que ces niveaux exercent à leur tour une pression sur les niveaux supérieurs qui tendent à modifier ces contraintes. Nous nous intéressons par ailleurs aux organisations didactiques en se centrant sur le moment de la première rencontre avec l’objet de savoir et celui de l’évaluation.

4. MÉTHODOLOGIE

Nous procédons à l’analyse du curriculum et de l’unique manuel officiel correspondant à chaque réforme du système tunisien. Les choix de la noosphère sont traduits dans le contexte tunisien par les auteurs du manuel. Celui-ci met en texte les directives du programme officiel et constitue la principale référence à suivre par les enseignants et les élèves. Nous percevons ainsi l’évolution des choix institutionnels à travers les organisations mathématiques et didactiques du savoir à enseigner développées en terminale scientifique pour les sections, sciences expérimentales et mathématiques. Le contenu de ce chapitre est identique pour ces deux filières. Nous considérons cinq réformes qui caractérisent les époques d’enseignements ayant subi des changements dans l’enseignement des mathématiques.

La réforme de 1958 : La période "classique" (Curriculum de 1958-1968)

La réforme de 1968 : La période de la "réforme" des mathématiques modernes (1968-1978)

La réforme de 1978 : la période "contre-réforme" (programmes 1978-1991)

La réforme de 1991 : la période "contemporaine" (Curriculum1991-2004)

La réforme de 2004 : La période de la réforme actuelle.

Cette analyse vise à caractériser le moment de la première rencontre avec cet objet de savoir à partir en tenant compte des approches d’enseignement les plus dominantes, le caractère outil-objet (Douady, 1986), le fonctionnement du graphique (Lacasta, 1995) et les registres de représentations sémiotiques les plus convoqués (Duval, 1993). Que nous illustrons dans la grille d’analyse suivante.

Approches d’enseignement	**Caractère "outil/objet"**	**Fonctionnement du graphique**	**Registres sémiotiquesles plus convoqués**
Équationnel- fonctionnel - Modélisation	Mise en fonctionnement dans les situations d’apprentissage dans les manuels.	Mode nomographique Mode idéogrammatique Mode opératoire	Algébrique, numérique graphique et discursif.

Tableau 1. *Grille d’analyse du savoir à enseigner autour des équations différentielles*

4.1 La période classique (1958-1968) : une approche fonctionnelle

Le programme de mathématiques de la réforme de 1956 a été divisé en trois domaines d'étude : arithmétique, algèbre et les notions d'analyse, trigonométrie et vectorielle et la géométrie analytique. Le thème consacré aux équations différentielles est inséré dans la "trigonométrie". Il s'agit de simplifier les types de tâches liées à la solution et de limiter les techniques à la recherche de primitives habituelles ou de questions guidées, comme on peut le lire dans la directive sur les programmes d'études de 1956 : « Exemples très simples de détermination des fonctions par une équation différentielle :$y' = f(x)$;$y' = f(y)$(quand on sait trouver des primitives) ;$y' + ay + b = 0$ (a et b réelles constantes) $y'' = p(x)$y, p(x) polynôme simple. » (Programme officiel 1956, p.39)

Les organisations mathématiques développées autour de la résolution sont organisées autour d'équations trigonométriques élémentaires dont les primitives sont connues et ne sont pas accompagnées d'un discours technologique justifiant la technique générale de résolution : « On n'a pas hésité à supprimer certaines démonstrations ou certains chapitres susceptibles de décourager l'élève par leur complexité. » (Programme 1959, p.1)

Les lignes directrices officielles du programme 1965 mettent un accent particulier sur les domaines de l'algèbre et l'analyse comme les fondements des mathématiques : « Toutefois, l'algèbre et l'analyse sont les éléments de base de la recherche mathématique moderne et sont plus facilement accessibles à la plupart des étudiants. » (Ibid., p. 1)

Les équations différentielles apparaissent dans le domaine de l'algèbre dans le domaine consacré aux équations et aux inéquations. De nouvelles organisations mathématiques sont organisées autour d'équations de second ordre de la forme$y'' + w^2 y = 0$.Mais les éléments technologiques sous-jacents à la solution ne semblent pas rompre avec le cadre géométrique comme illustré par le manuel officiel extrait de (1965) définissant les solutions des équations différentielles du type$y' = P(x)$ et $y'' = P(x)$

Les graphiques de toutes les solutions de $y' = P(x)$ ont des tangentes parallèles à tous les points d'un même parallèle à Oy, parce que pour toutes ces fonctions, y' prend la même valeur pour une valeur de x..

2) $y'' = P(x)$: si $Q(x)$ représente une primitive de $P(x)$, cette équation est équivalente à $y' = Q(x)$qui est du type précédent. Ainsi, si $y'' = P(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, il vient successivement $y' = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \lambda$ et $y = a_0 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{2.3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \lambda x + \mu$, λ, μ sont des constantes arbitraires. Il existe ici une infinité de solutions en fonction de deux paramètres arbitraires λ,μ. Il y a encore une infinité d'entre eux qui prennent, pour une valeur déterminée de x, une valeur déterminée; il n'y en a qu'un qui prend des valeurs déterminées pour deux valeurs données de x.

Toutes ces fonctions ont les mêmes valeurs de y'' pour une valeur de x et donc si les graphiques de toutes ces solutions ont des points d'inflexion, ceux-ci sont situés sur des parallèles sur Oy.

Figure 2. *Extrait du manuel (1965) du volume 2 de l'algèbre (p. 216)*

L'organisation didactique est une organisation binaire qui se traduit en termes de "cours" et "exercice". Dans la deuxième section du chapitre consacré aux équations différentielles, les techniques développées sont purement géométriques en rapport étroit avec le graphique pour illustrer la fonction solution d'une équation différentielle. Plusieurs types de tâches sont convoqués « montrer que le graphique correspond à une parabole", "calculer l'aire d'une surface comprise entre la courbe de la fonction solution et un axe du référentiel", "déterminer la transformation qui transforme le graphique d'une solution d'une équation différentielle en une courbe donnée". Le graphique est alors conçu comme un outil de construction de preuve dans un contexte géométrique. En référence aux travaux de Lacasta (1995) et Bloch, (2000), ce registre est utilisé selon un mode qui vient renforcer la niche fonctionnelle des équations différentielles par un travail graphique. Dans le manuel (1965) d'algèbre volume 2, (p.245) nous parlons d'une courbe d'enveloppe, celui-ci admet deux définitions géométriques traditionnelles, presque équivalent :

- L'enveloppe est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.
- C'est le lieu des points caractéristiques, des points d'intersection de deux courbes infiniment rapprochées.

Plus précisément, l'enveloppe a une définition analytique ; c'est l'ensemble des points critiques de l'application de projection associés à la famille de courbes. Les enveloppes reflètent certains phénomènes très communs, tels que les caustiques. Ils sont utiles dans l'analyse pour décrire les solutions singulières des équations différentielles ou aux dérivées partielles, comme enveloppes de solutions régulières.

4.2 Les périodes de mathématiques modernes, de contre-réforme et contemporaines (1968-1978-1991) : une approche équationnelle

Au cours de la réforme mathématique moderne (1968) connue pour son approche structurelle et définie et celle de la contre-réforme (1978), les équations différentielles laissent l'habitat trigonométrique apparaître comme le couronnement des notions d'analyse avec une approche plus algébrique. Ainsi depuis (1993) la niche des équations différentielles devient essentiellement équationnelle, les types d'équations différentielles présentées sont très variées et les techniques développées sont de nature algébrique (tableau1). L'introduction de cette notion est envisagée selon une dimension "objet" de l'algèbre accompagnée d'une explication des techniques justifiées par des notions fixes et provenant de l'algèbre linéaire.

Remarques :
1) Le théorème 1 montre que S est une ligne vectorielle générée par $f_1\colon x \to e^{\alpha x}$
2) Prouver que l'ensemble S de solutions de l'équation différentielle (E) $ay'' + by' + cy = 0$

Figure 3. *Extrait du manuel de mathématiques de 1993*

Types d'équations différentielles	Solution de l'équation
$y' - \alpha y$	$x \to \lambda e^{\alpha x}$
$y' - \alpha y \; avec \; y(x_0) = y_0$	$x \to y_0 e^{\alpha(x-x_0)}$
$y' - \alpha y = f(x)$	Si f(x) est un polynôme de second degré alors : $x \to f_0(x) + \lambda e^{\alpha x}$, $f_0(x) = ax^2 + bx + c$
	Si f(x) est une fonction trigonométriquealors : $x \to f_0(x) + \lambda e^{\alpha x}$,$f_0(x) = Acos(wx) + Bsin(wx)$
	Si f(x) est sous forme $be^{\alpha x}$ alors : $x \to f_0(x) + \lambda e^{\alpha x}$,$f_0(x) = ce^{dx}$

$ay'' + by' + cy =$ 0 D'équationcaractéristique $(ar^2 + br + c = 0)$:	$x \to (\alpha x + \beta)e^{\frac{-b}{2a}x}$
	$x \to \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$, r_1, r_2 solutions de l'équation caractéristique
	$x \to e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$,$r_1 = \alpha + \beta i$ et $r_2 = \alpha - \beta i$
$y'' + w^2 y = 0$	$x \to \alpha\cos(wx) + \beta\sin(wx)$

Tableau 2. *Types d'équations différentielles et leurs solutions*

Cette observation s'apparente aux travaux développés par Artigue (1989) dans le contexte français au début de l'université : « Enfin, c'est un enseignement très algorithmique, compte tenu de la réduction opérée, assez facile à la fois pour les enseignants et les étudiants, mais sans enjeu réel malgré l'importance mathématique du domaine. » (Artigue, 1989)

4.3 La période actuelle (à partir de 2004) : une approche de modélisation

L'analyse praxéologique effectuée sur le manuel officiel actuel pour la dernière année du lycée suggère une perte progressive du formalisme attaché aux équations différentielles. En effet, on ne voit que trois types d'équations différentielles de la forme $y' = ay$, $y' = ay + by$ et $y'' + w^2 y = 0$ et la disparition des équations différentielles de second ordre sans second membre de la forme $ay'' + ay' + by = 0$ayant fait l'objet d'un enseignement lors de la réforme précédente (programme de 1993). De plus, le moment de la première rencontre se fait par des activités de découverte, dont certaines sont présentées comme des problèmes à modéliser par des équations différentielles, avant le moment de l'institutionnalisation qui présente les définitions des objets de manière naturalisée en l'absence de langage mathématique qui leur sont liés, solution homogène, solution particulière..., comme il est illustré dans le manuel officiel pour la dernière année du lycée (bac 2021).

Théorème :
Soit a un réel. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f: x \to ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$

Figure 4. *Extrait du manuel (2021), section de mathématiques de 7ème année, (p. 190)*

Par ailleurs, l'analyse des activités proposées dans le manuel officiel laisse entrevoir une importance accordée à la résolution de problèmes se modélisant par des ED dans un contexte qui fait appel à des domaines d'expériences variés comme l'illustre la figure suivante.

Activité 6

On considère une substance radioactive. On désigne par $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs existants dans la substance à l'instant t (exprimée en années) et par N_0 le nombre de noyaux existants à $t = 0$.
On constate que la vitesse $N'(t)$ de désintégration des noyaux à l'instant t est proportionnelle au nombre $N(t)$, avec un coefficient de proportionnalité égal à $-\lambda$ où le réel strictement positif λ est appelé constante radioactive du noyau.

1. Donner l'expression de $N(t)$.
2. Déterminer, en fonction de λ, le temps $T_{0,5}$ au bout duquel la moitié des noyaux s'est désintégrée. ($T_{0,5}$ est appelé durée de demi-vie de la substance).
3. On suppose que la substance radioactive est du carbone 14.
   a. Déterminer λ sachant que $T_{0,5} = 5730$.
   b. Déterminer l'âge d'un fragment d'os qui contient 60% de la quantité initiale.

Figure 5. *Extrait du manuel officiel tunisien (2019)*

L’équation différentielle apparait dans cette activité comme un "outil" explicite permettant d’interpréter le phénomène modélisé : l’âge d’un fragment d’os qui contient 60% de la quantité initiale. Le champ des problèmes extra-mathématiques proposés dans les manuels officiel actuel fait appel à une variété de contexte d'étude dans des domaines d'expériences issus de la physique, la biologie, la chimie ... comme il est illustré dans le tableau suivant.

Domaines d'expériences	**Exercices et référence**	**Thèmes abordés**	**La forme de l’équation différentielle**
Chimie	Ex4-p201	Loi de refroidissement de newton	$y' = ay + b$
	Ex5-p201	Dissolution d’une substance	$y' = ay + b$
	Ex26-p205	La masse d’un mélange de sel et d’eau	$y' = ay + b$
Physique	Ex7-p201	Charge et décharge d’un condensateur	$y' = ay, avecy(x_0) = y_0$
	Ex32-p207	Circuit LC	$y'' + ay = 0$
	Ex13-p202	Circuit RLC	$y' = ay + b$
	Ex21-p203	Circuit LC	$y' = ay + b$
	Ex29-p206	Loi de Newton appliqué à la température	$y' = ay + b$
	Activité 6p192	Radioactivité	$y' = ay$
	Problème p198	Mécanique	$y'' + w^2y = 0$
	Activité 3p194	Circuit RC	$y' = ay + b$
	Ex30-p206	Variation de température d’un fil conducteur parcouru par un courant électrique	$y' = ay + b$
Pharmaceutique	Ex6-p201	Concentration d’un médicament dans le sang	$y' = ay, avecy(x_0) = y_0$
Biologie	Ex9-p202	Vitesse de prolifération des microbes	$y' = ay, avecy(x_0) = y_0$
	Activité 2p190	Evolution d’une population de bactérie	$y' = ay, avecy(x_0) = y_0$
	Ex31-p206	Croissance d’une population de poisson	$y' = ay, avecy(x_0) = y_0$
Médicine	Ex23-p204	Injection dans le sang par piqûre intraveineuse	$y' = ay, avecy(x_0) = y_0$

Tableau 3. *Activité extra-mathématiques existant dans le manuel officiel tunisien (2019)*

L’analyse des situations extra-mathématiques de manuel actuel de dernière réforme montre que le projet institutionnel est en général un projet pseudo-interdisciplinaire. En effet la *pratique pseudo-interdisciplinaire* consiste à se servir d’un thème (physique, biologie,) comme prétexte et seul fil conducteur à un enseignement cloisonné des disciplines scolaires sélectionnées. Dans une telle approche, comme le soulignent Lenoir, Larose et Laforest,

> Le thème sert uniquement de déclencheur à des activités d’apprentissage monodisciplinaires. Ainsi, le “lien” n’existe qu’au seul niveau de la mise en situation, le déroulement des activités qui lui sont consécutives étant mené de façon autonome, complètement séparée, en fonction des contenus d’apprentissage de différents programmes d’études (Lenoir, Larose & Laforest, 2001, p. 74).

L'analyse praxéologique des situations de modélisation montre que la plupart des techniques relèvent du champ des mathématiques et le discours technologique est souvent explicité lorsqu'il est de nature mathématique. Le caractère mixte de ces situations semble renvoyer plus à un habillage que à la recherche du modèle ou à l'interprétation des phénomènes ou des lois extra-mathématiques en jeu. Cependant, cela n'exclue pas le fait qu'un renforcement de la dialectique entre registre apparait notamment entre les registres algébrique et graphique mais cette dialectique n'est pas suffisamment investie au service des autres domaines d'expérience puisque certains types de tâches se limitent à l'exécution d'une résolution algébrique puis à la représentation graphique de la solution sans aller plus loin la continuité didactique.

5. L'ÉVOLUTION DU SAVOIR À ENSEIGNER AUTOUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Les analyses des pratiques institutionnelles réalisées via les programmes et manuels officiels correspondants à chaque époque d'enseignement du système éducatif tunisien mettent en avant des évolutions dans les organisations mathématiques et didactiques développées autour des ED. Pour la réforme des maths modernes, l'approche de l'enseignement des ED est essentiellement "équationnelle". Les ED proposées sont peu variés et leurs résolutions s'effectuent systématiquement dans le cadre algébrique. Les programmes de la contre-réforme, suggèrent une introduction d'éléments de l'analyse qui se détachent progressivement du domaine de l'algèbre. Les ED changent ainsi d'habitat et apparaissent comme le couronnement des notions d'analyse. Le contexte « structurel » propre à la réforme des maths modernes, en lien avec des notions ensemblistes et la notion de fonction, apparaît dans l'environnement des ED. Celles-ci sont introduites selon leur dimension « objet » et sont envisagées selon un aspect plus structurel que procédural. Les résolutions convoquées mettent en jeu des techniques algorithmiques et une absence d'articulation entre registres sémiotiques. Par ailleurs, pour ces deux réformes, l'enseignement de cette notion se limite à des filières particulières et ne constitue pas un objet d'enseignement pour les sections scientifiques. Dans les programmes des années 90, et en raison de leur utilisation en sciences physiques, les ED refont apparition dans les programmes de terminale maths-sciences et maths-technique. De nouveaux types d'ED de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ réapparaissent dans les manuels, dans le même habitat que les précédentes mais l'aspect algébrique du traitement de ces équations reste dominant. Avec l'avènement de la réforme de 2004 une nouvelle perspective d'enseignement des mathématiques apparait au niveau des manuels officiels, conférant davantage de place à la modélisation de situations extra-mathématiques. Les ED jouent un rôle transversal favorisant une approche interdisciplinaire et un développement d'activités faisant appel à une variété de contextes et des domaines d'expériences. Elles sont désormais un objet d'enseignement pour les sections mathématiques et sciences expérimentales et viennent renforcer l'enseignement des fonctions usuelles, logarithme, exponentielles et trigonométriques ainsi la consolidation des acquis sur les primitives des fonctions. Par ailleurs, le registre graphique, occupe une place importante dans les programmes actuels et le discours technologique qui accompagne la technique de représentation graphique est justifié par un bloc technologico-théorique explicite en lien avec les fonctions exponentielles. Toutefois, ce travail se limite en général à des tâches d'illustration de solution ou à une lecture graphique des propriétés de tangentes (pente, sous-tangente, coordonnées, vecteur directeur.) qui vise la consolidation des acquis en géométrie analytique. Ainsi, l'enseignement des ED actuellement met en jeu une étude simultanée des objets de savoir en même temps que l'activité de modélisation fonctionnelle dans une perspective interdisciplinaire. Cet aspect est nourri par les jeux de cadres et la flexibilité entre registres par contraste avec les époques d'enseignement passées qui renvoient à une approche plus « statique » de la discipline (Ben Nejma, 2020, 2021).

Les analyses dévoilent également une volonté de la part des concepteurs du manuel à favoriser une mise en relation des deux disciplines mathématiques et sciences physiques pour l'enseignement de cette notion favorisant une certaine « continuité didactique » entre les deux.

6. CONCLUSION

L'approche de l'enseignement des ED qui favorise la modélisation de situations d'apprentissages variés dans une perspective interdisciplinaire interroge les modalités d'organisation et de la réalisation effective d'un enseignement collaboratif et complémentaire relatif à cet objet de savoir. L'histoire de l'enseignement de cette notion au fil des réformes du système éducatif tunisien témoigne de l'intérêt accordé au développement de cette notion dans un contexte interdisciplinaire mais remet en question la manière dont les praxéologies mathématiques sont développées dans le manuel et interroge aussi l'apprêtage didactique qui en est fait par les enseignants. Même si les politiques éducatives tentent de s'aligner avec cette nouvelle approche d'enseignement, les modalités de leur mise en œuvre sur le terrain ne vont pas de soi. C'est ce qui pourrait expliquer en partie la place accordée à cet objet de savoir dans les évaluations nationales du baccalauréat par crainte de ne pas retrouver les performances souhaitées. Il nous semble que cet objet de savoir à caractère unifiant et transversal doit être doté d'une fonctionnalité réelle et dynamique au sein du système didactique pour survivre et concrétiser les objectifs d'une telle approche d'enseignement.

BIBLIOGRAPHIE

ARTAUD, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. *L'écologie des organisations mathématiques et didactiques*, In Bailleul et al. (eds.), Actes de la IXème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques 1997, pp. 101-139. Houlgate.

ARTIGUE, M. (1989a). Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles du premier cycle universitaire*, Cahier du séminaire de Didactique des Maths et de l'Informatique de Grenoble*, IMAG, pp.183-209.

ARTIGUE, M. (1989b). Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 9, n°3, pp. 281-308. La pensée Sauvage. Grenoble.

BEN NEJMA, S. (2009). D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes : une étude de cas en algèbre dans le contexte scolaire tunisien. *Thèse des universités de Paris 7 et de Tunis.*

BEN NEJMA, S. (2010). Quel impact d'une évolution du curriculum officiel sur les pratiques Enseignantes ? Etude de cas dans le contexte tunisien. *Petit x*, 82, 5-30.

BEN NEJMA, S. (2012). Pratiques enseignantes et changements curriculaires : une étude de cas en algèbre élémentaire. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Enseignement des mathématiques et Contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle*. Actes du colloque EMF2012 (p. 1133-1142). Université de Genève, Genève.

BEN NEJMA, S. et JABRANE, A. (2021). Une analyse de la transposition didactique des équations différentielles en terminale scientifique : réformes curriculaires et défis institutionnels. *International Journal of Applied Research and Technology* Vol (N°3), 2021

BEN NEJMA, S. et JABRANE, A. (2021). A Didactical Analysis of Teaching Practices Around Differentials Equations in Tunisian School Context. *Science Journal of Education* Volume 9, Issue 5, October 2021, pp. 157-169

BLOCH, I. (2000). L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université : connaissances, savoirs, et conditions relatives à la validation. *Thèse de Doctorat*, Université Bordeaux 1

CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble. La pensée sauvage.

CHEVALLATD, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du Didactique, *Revue de Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266. Grenoble. La pensée Sauvage.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 7(2), pages 5–31

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive*, n°5, pp. 37-65. IREM de Strasbourg.

JABRANE, A. (2019). Une étude didactique de l'évolution de l'enseignement des équations différentielles en terminale et son impact sur les pratiques enseignantes dans le contexte tunisien, *Master de recherche en didactique de mathématiques*. Université virtuel de Tunis.

LACASTA E. (1995) : Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques: illusions et contrôles, thèse, Université de Bordeaux 1.

LENOIR, Y., LAROSE, F. et LAFOREST, M. (2001). Les représentations de la pratique interdisciplinaire chez les enseignants québécois du primaire. *Les Dossiers des sciences de l'éducation*, vol. 5, p. 67-78.

MALONGA, F. (2008) : L'enseignement des équations différentielles à l'interface mathématiques Physique dans l'enseignement secondaire français, In N. Bednarz, C. Mary (Eds). *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*. *Actes du colloque international espace mathématique francophone.* Éditions du CRP Sherbrooke. Canada.

RAJOSON, L. (1988), *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas*. Thèse de Doctorat de l'Université d'Aix-Marseille 2.

Discours sur les lois classiques des probabilités

Mohamed Hatem Kefi
Institut Supérieur de l'Éducation et de la Formation Continue

RÉSUMÉ

Les lois de probabilités ainsi que les théorèmes limites constituent les piliers d'une formation en statistique. Dans ce texte nous discutons les principales lois discrètes. Nous focalisons d'abord notre discours sur les différentes relations entre ces lois. Puis, nous évoquerons les rapports entretenus entre les lois discrètes et les lois continues, notamment la loi normale, et le rôle fondamental des théorèmes limites dans ce rapport. Dans ce travail, constituant un préalable à l'étude d'organisations probabilistes institutionnelles, nous essayons de souligner quelques points que nous pensons susceptibles être des causes des difficultés que rencontrent les étudiants lors de l'apprentissage de ces différentes notions.

1. INTRODUCTION

En théorie des probabilités (dont l'objet est de définir les modèles mathématiques du hasard) et en statistique (confrontation des modèles mathématiques aux données observées pour la prise de décision), une loi de probabilité décrit le comportement aléatoire d'un phénomène dépendant du hasard, elle permet de modéliser les incertitudes et de décrire des phénomènes dans tous les domaines scientifiques, technologiques, économiques, médicales, ... Il est alors important d'identifier « correctement » une loi suivie par une variable aléatoire afin de ne pas compromettre le choix des méthodes statistiques employés pour résoudre un problème donné.

La théorie des probabilités nous offre une multitude de lois (discrètes et continues) pour répondre à une question statistique. Cette offre de lois résume dans un premier temps les conditions et les modes de leurs utilisations puis leurs assimilations, sous certaines conditions à la loi normale. C'est notamment les lois discrètes qui, grâce à leur simplicité, permettent de modéliser une situation aléatoire, en donnant les probabilités des évènements élémentaires qu'elles induisent. Identifier une loi de probabilité revient à définir ces paramètres.

Les lois discrètes (de même pour les lois continues) jouissent d'un enseignement spécifique dès le secondaire pour se poursuivre au supérieur. Une des difficultés de leurs enseignements réside non pas dans leurs applications mais dans leurs identifications, ce qui revient à dire dans la modélisation mathématique.

La tâche d'identifier une loi de probabilité, au niveau académique, c'est de détecter à partir des énoncés les conditions d'applications et les paramètres d'une telle ou telle loi, ce qui suppose pour les apprenants, au premier abord, un niveau assez bon de la langue. En Tunisie par exemple, le cours de probabilité en terminale et au supérieur est dispensé en français, alors la condition essentielle pour amener à bon terme un problème probabiliste est la compréhension de la langue.

La bonne compréhension de la langue minimise considérablement les erreurs et les réponses erronées dans un exercice de probabilité.

2. Cadre théorique

Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique en utilisant les modèles des praxéologies (Chevallard, 1999). En effet, notre discours porte sur les liens entre quelques lois des probabilités usuelles qui sont des organisations mathématiques. Rappelons qu'une organisation mathématique est un ensemble de types de tâches qui peuvent être accomplies par un ensemble de techniques, justifiées par des éléments technologiques qui à leurs tours sont supportés par une théorie. Ces organisations seront traitées à partir de quelques tâches (exemples) choisies.

3. Les principales lois discrètes

La majorité de la littérature relative à la loi binomiale la présente comme étant une succession de n épreuves identiques et indépendantes de Bernoulli dont la probabilité du succès est p. Et la variable aléatoire associée donnant le nombre de succès dans ces n épreuves.

L'utilisation de cette loi est assez simple dans la mesure où on identifie les conditions nécessaires de cette loi :

- Répétitions identiques et indépendantes
- Le nombre d'épreuves
- Les deux issues dont p la probabilité du succès

Plusieurs auteurs dont entre autres Ubøe (2017, p. 116) proposent des conseils et des astuces relativement à son identification, mais malgré cela beaucoup de personnes confondent cette loi avec d'autres ou hésitent même à son utilisation.

Mais aussi, une fois cette loi détectée, la réponse aux questions proposées, qui sont en général des probabilités d'événements considérés, peut être erronée.

Et ces erreurs peuvent être de différentes natures : liées aux calculs, à la mauvaise utilisation de la table de cette loi, et surtout liée à la mauvaise traduction de l'évènement considéré en langage mathématique (la modélisation fait défaut).

Comme sur cet exemple : on dispose de 7 machines fonctionnant indépendamment les unes des autres, chacune a la probabilité 0.8 de fonctionner sans défaillance pendant un temps donné. À partir de cette phrase on doit reconnaitre une loi binomiale de paramètres 7 et 0.8.

« Chacune a une probabilité de 0.8 de fonctionner sans défaillance » est traduite par la reconnaissance d'une épreuve à deux issues dont le succès est le fonctionnement sans défaillance.

« On dispose de 7 machines » est synonyme de la taille de l'échantillon, c'est-à-dire n épreuves de Bernoulli identiques, alors que la suite de la phrase *« fonctionnant indépendamment les unes des autres »* permet d'affirmer que toutes les épreuves sont indépendantes.

Ainsi, en posant la phrase magique : X : « le nombre de machines fonctionnant sans défaillance », l'élève ou l'étudiant peut assimiler la loi de X à une loi binomiale de paramètres 7 et 0.8 : $\times \hookrightarrow B(7; 0.8)$.

Jusqu'à ce point tout va bien sauf peut-être qu'il est essentiel de bien traduire le 0.8 comme la probabilité qu'une machine fonctionne correctement et ne pas confondre le terme 'sans défaillance' avec l'habituel terme 'défaillant'.

Après avoir achevé la modélisation de la situation, l'apprenant s'engage dans la réponse aux questions, et c'est là où nous pensons que surgissent les difficultés les plus résistantes tel que la compréhension de ce qui est demandé ou les diverses confusions qui empêchent la proposition des bonnes réponses comme par exemple à ces questions :

Calculer la probabilité pour que pendant un temps t :

- Au moins une fonctionne sans défaillance. : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$
- Il y en a moins de 4 qui fonctionnent sans défaillance : $P(X < 4)$.

Une erreur fréquente dans ce genre de situations est la confusion entre les termes 'Au moins...' et 'moins de…' qui n'ont pas le même sens et par conséquent le traitement probabiliste n'est pas le même.

D'autres difficultés peuvent apparaitre sur le deuxième exemple suivant :

Pour contrôler la qualité de fabrication, on prélève un échantillon de 100 pièces et on note N_1 le nombre de pièces défectueuses. S'il y a régulièrement 1 % de pièces défectueuses quelle est la loi de N_1 ? La réponse convenable à cette question pose pas mal de soucis.

D'abord on peut procéder par élimination. La loi n'est pas géométrique car la taille de l'échantillon est finie, N_1 prend ses valeurs dans $\{1,2, \ , \ \ldots \ ,100\}$. Elle n'est pas non plus hypergéométrique puisqu'il ne s'agit pas d'un tirage sans remise dans un ensemble fini : on considère qu'il s'agit de pondérer chaque pièce défectueuse prélevée de la probabilité $\frac{1}{100}$ et ceci indépendamment des autres pièces.

Mais tout ceci doit être supposé par l'élève, car il y a peu d'informations dans l'énoncé. Et doit-il opter d'abord pour une loi binomiale $B(100; \ 0.01)$ et puis pour une loi de Poisson de paramètre 1 puisque les conditions de l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson sont satisfaites. Une fois ce handicap surmonté, on doit traduire ce qui suit mathématiquement pour pouvoir venir au bout de ce problème :

Quelle est la probabilité de déclarer la production satisfaisante en sachant que :

- Si $N_1 = 0$ la production est déclarée satisfaisante. (Ce qui est évident en principe !)
- Si $N_1 \geq 2$ elle est mise au rebut (c'est-à-dire rejetée).
- Si $N_1 = 1$ on prélève un deuxième échantillon de 100 où N_2 est le nombre de pièces défectueuses.
- Si $N_2 = 0$ la production est déclarée satisfaisante.
- Si $N_2 \geq 1$ elle est mise au rebut.

L'apprenant doit avoir un bon niveau de français d'abord et du bon sens pour pouvoir amener la recherche de la probabilité de déclarer la production satisfaisante par la recherche de $P(N_1 = 0 \cup N_1 = 1 \cap N_2 = 0)$ et puisqu'il s'agit d'une union de deux événements incompatibles $P = P(N_1 = 0) + P(N_1 = 1) \times P(N_2 = 0)$.

Ces deux exemples montrent bien quelques difficultés qu'on peut rencontrer dans les lois de probabilités au niveau de l'apprentissage et aussi au niveau de l'enseignement. Et ces difficultés liées aux lois ne sont pas intrinsèques à leurs utilisations et leurs exploitations car une fois la loi mise en place tous les calculs et leurs conséquences deviennent assez élémentaires. Ainsi, l'enseignement des lois ne doit pas se limiter aux techniques relatives et aux passerelles entre elles. Mais aussi, il doit prendre en considération les à-côtés qui entourent leurs apprentissages et la motivation des apprenants pour afin qu'ils puissent prendre les décisions adéquates vis-à-vis d'un problème donné.

Un troisième exemple[1] : Giovanni, dit Gianni, à décider de parcourir cet été 10000 Km en Fiat Ritmo. Or la probabilité d'avoir un accident sur 1 Km est de $\frac{1}{10000}$. En prenant connaissance de cette probabilité, Gianni décide alors d'annuler son long voyage en prétextant d'être sûr d'avoir un accident. Êtes-vous d'accord avec Gianni ? si ce n'est pas le cas, quelle est l'erreur commise par notre ami Gianni ? Quelle est alors approximativement la probabilité que Gianni ait un accident ?

Le vocabulaire utilisé dans cet exercice est assez simple il peut être compris par une majorité d'étudiants de première année d'université et même de terminale. La manière rigolote dont est proposé le texte permet de motiver les apprenants et aide l'enseignant à mener à bon terme son enseignement des propriétés visées.

Une première propriété est « si la probabilité est p pour un individu alors pour n individu la probabilité est aussi p » et non pas $n \times p$ qui constitue l'erreur commise par Gianni en disant puisque la probabilité d'avoir un accident sur 1 Km est de $\frac{1}{10000}$ alors en parcourant 10000 Km la probabilité d'avoir un accident sera égale à 1.

Pour chercher la bonne probabilité d'avoir un accident, les apprenants doivent être en mesure d'assimiler le parcours de 10000 Km à un tirage avec remise et considérer que tous les tirages sont identiques et indépendants et de même probabilité. Une fois ces conditions sont mises en évidence, on s'intéresse à la variable aléatoire X : « le nombre d'accidents sur 10000Km » qui suit une loi binomiale $B(10000{,}0.0001)$ qu'on peut approximer par une loi de Poisson de paramètre 1.

Le théorème suivant, dont on peut trouver une démonstration dans Appel (2013, p. 448), justifie cette approximation :

Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels dans $]0, 1[$ telle que $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$. Pour chaque entier n, on note $X_n$le nombre de succès obtenus dans la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p_n)$ ainsi, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$. Alors, $P(X_n = k) \longrightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. En d'autres termes, la suite (X_n) converge en loi vers la loi de poisson de paramètre λ.

En vertu de ces résultats, sur les 10000 Km parcourus, la probabilité que Gianni ait un accident est égale à 0.63. Ce théorème permet d'approximer une loi binomiale de paramètres n et p par une loi de poisson de paramètre $\lambda = np$ dès que n est fixé et grand et que p est très petit.

En pratique on accepte cette approximation lorsque $n \geq 30$; $np < 15$ et $p < 0.1$

Cette approximation est pratique lorsque les coefficients binomiaux sont calculés assez difficilement en faisant intervenir des fractions avec de grands nombres. Néanmoins de nos jours les machines à calculer et les ordinateurs permettent assez facilement de calculer ces coefficients et du coup cette approximation perd de plus en plus son importance.

Outre la loi binomiale et celle de poisson, une autre loi discrète simple mais de plus en plus négligée malgré son importance est la loi hypergéométrique, loi basée sur le combinatoire et il se trouve qu'elle est à la base de nombreuses applications au niveau du secondaire mais sans pour autant être citée par son nom à ce niveau d'enseignement.

Généralement, les exercices du secondaire faisant intervenir implicitement cette loi sont énoncés de la manière suivante : Une urne contient n boules rouges et n' boules blanches indiscernables au toucher (afin de garantir l'équiprobabilité des événements élémentaires). On tire au hasard

[1] (Cantoni, Huber , & Ronchetti, 2006, p. 27)

simultanément k boules de l'urne et on s'intéresse au calcul de la probabilité du nombre d'un des types de boules tirées. Comme l'illustre cet extrait d'une épreuve de terminale S (Amérique du sud novembre 2004[2]) :

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.

On note A_0 l'évènement « on n'a obtenu aucune boule noire ».

On note A_1 l'évènement « on a obtenu une seule boule noire ».

On note A_2 l'évènement « on a obtenu deux boules noires ».

Montrer que $p(A_0) = \frac{6}{15}$; $p(A_1) = \frac{8}{15}$; en déduire $p(A_2)$.

Les deux expressions clés de l'énoncé qui permettent de résoudre le problème, sont « les boules sont indiscernables au toucher » et « Le tirage sans remise de deux boules de l'urne ».

Un élève de ce niveau appelé à répondre à cette question raisonne a priori de cette manière : $p(A_k) = \frac{CardA_k}{Card\Omega}$

- Le nombre de façons de choisir 2 boules parmi 6 est : $C_6^2 = 15$
- Le nombre de façons de choisir k boules parmi les 2 noires est : C_2^k
- Le nombre de façons de choisir m = $6 - k$ boules parmi les 4 rouges est : C_4^m

$$p(A_k) = \frac{CardA_k}{Card\Omega} = \frac{C_2^k \times C_4^{6-k}}{C_6^2}$$

En fait l'élève n'applique en réalité ici rien d'autre que la loi hypergéométrique de paramètres : $N = 6, n_1 = 2 \; et \; n = 2$

Le principe de cette loi consiste à considérer une proportion *p* connue d'une population de taille N (connue) qui possède un certain caractère A objet d'étude. L'expérience consiste alors à tirer au hasard et d'une manière exhaustive n éléments ce qui revient à réaliser n tirages sans remise dans une urne et on s'intéresse ensuite à la détermination de la probabilité que k éléments parmi les n tirés possèdent le caractère A.

Si m désigne le nombre d'éléments possédant le caractère A alors $p = \frac{m}{N}$ on peut alors identifier la situation à un problème de tirage aléatoire de boules dans une urne et les n tirages sans remise se confondent avec un tirage simultané de n objets parmi N.

On considère la variable aléatoire X égale au nombre k $(k \leq m)$ d'apparitions d'éléments ayant le caractère A tout en sachant que leur effectif dans la population est m. Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, m, n)$ où

- N La taille de la population
- m L'effectif du caractère étudié.
- n Le nombre de tirages sans remise.

Ci-après les premières remarques qu'on peut avancer sur cette loi. D'abord son nom est assez bizarre, notons que cette loi n'a aucune relation avec la loi géométrique qui s'intéresse dans une épreuve de Bernoulli à chercher la probabilité du premier succès lors de n tirages et par conséquent et contrairement à la loi hypergéométrique la taille de la population N est aléatoire. En plus la loi

[2] En ligne sur (APMEP, 2021)

géométrique dépend d'un seul paramètre qui est la probabilité du succès alors que la loi hypergéométrique exige la connaissance de trois paramètres. Puis, l'identification de ces trois paramètres peut être une source de confusion et par suite de difficulté lors de son application. En réalité la loi hypergéométrique est en étroite relation avec la loi binomiale.

Bien que son espérance mathématique soit simple et est égale à celle d'une loi binomiale, sa variance par contre est plus petite que celle de cette dernière puisqu'elle fait apparaitre dans son expression le coefficient d'exhaustivité, de longs et fastidieux calculs permettent de donner la formule de cette variance qui vaut : $V = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$

Les relations qu'entretient la loi hypergéométrique avec la loi binomiale peuvent, à notre sens, être à l'origine de nombreuses difficultés lors de la mise en application d'une façon adéquate de l'une ou l'autre de ces lois, notamment de la loi hypergéométrique puisque les différences entre les deux lois sont minimes et ils ne sont identifiables qu'à la lecture de l'énoncé du problème dans lequel ces lois doivent être mises en œuvre. Nous pensons par ailleurs que les problèmes de distinction entre ces deux lois peuvent être aggravés par le niveau de nos étudiants tunisiens en français.

Déterminons d'abord le champ d'application de ces deux lois. Les deux lois ont une base commune qui est le schéma de Bernoulli où toute épreuve aléatoire n'a que deux issues complémentaires qu'on note généralement « succès » et « échec ». En fait ces deux lois sont une traduction du modèle fondamental de l'urne dans laquelle la constitution est finie et fixée et où il est question de répéter l'expérience de tirer n éléments de cette urne. La nature des tirages justifie l'utilisation de l'une ou l'autre de ces deux lois dans une situation donnée.

Dans le cas où les éléments tirés sont remis dans l'urne ceci garantit l'invariance de la probabilité d'un événement tout au long de l'expérience et ainsi que l'indépendance des tirages alors il s'agit d'un schéma binomial. Par contre si les éléments tirés ne sont pas remis dans l'urne les tirages ne sont plus indépendants et la probabilité d'un événement n'est plus constante lors de la réalisation des différents tirages c'est le schéma hypergéométrique qui s'impose dans cette situation.

La loi hypergéométrique et la loi binomiale ont une espérance commune alors que la variance de la loi hypergéométrique est légèrement plus petite que celle de la loi binomiale et elle vaut : $V = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$.

Le coefficient d'exhaustivité $\frac{N-n}{N-1} = 1 - \frac{n-1}{N-1}$ peut servir à prouver l'approximation de la loi hypergéométrique par une loi binomiale en effet pour N très grand $\frac{N-n}{N-1} \sim 1$ par conséquent : pour un taux de sondage $\frac{n}{N}$ faible (inférieur à 10%) on aura :

$E(X_n) = np$ et $V(X_n) \approx np(1-p)$, ce qui nous donnera l'espérance et la variance d'une loi binomiale de paramètres n et p. L'utilisation des paramètres des lois permet de justifier convenablement cette approximation, un moyen beaucoup plus rigoureux basé sur le principe de la convergence en loi pour montrer cette approximation. En fait $(X_n)_{n\geq 1}$ Converge en loi vers X si pour toute fonction f définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$ on a $E(f(X_n)) \to E(f(X))$. Pour une variable aléatoire discrète, la convergence en loi vers une variable discrète est prouvée selon la formulation : $P(X_n = k) \to P(X = k)$.

La convergence de loi hypergéométrique vers la loi binomiale signifie qu'à partir d'une certaine valeur de N, les fonctions de masses des deux lois coïncident d'une manière plus au moins significative, ce qui permet d'oublier la dépendance entre les épreuves de Bernoulli successives due à l'absence de remise des éléments dans l'univers caractéristique principal d'un schéma hypergéométrique. Ceci est réalisable comme c'est déjà mentionné ci-haut dès que N (la taille de la population) est assez grand mais aussi et surtout selon la valeur de n puisqu'elle permet de calculer ce fameux taux de sondage $\frac{n}{N}$. Dans la littérature, on accepte cette approximation dès que $N > 10n$, c'est-à-dire dès que $\frac{n}{N} \leq 0.1$ (Saporta, 2006, pp. 37-38). Remarquons qu'à 10% cette approximation n'est pas assez satisfaisante comme on peut le voir, en comparant, par exemple, une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.5$ avec une loi hypergéométrique de paramètres $N = 100$, $n = 10$ et $p = 0.5$. Par contre pour $N = 1000$, c'est-à-dire pour un taux de sondage égal à 1% la coïncidence est parfaite.

En plus des approximations des lois discrètes entre elles, ces dernières peuvent sous certains critères être approchées par les lois continues notamment la loi normale.

4. Du discret au continu

La loi des grands nombres permet de relier le calcul des probabilités à la statistique. En fait cette loi est à la base de l'approche fréquentiste des probabilités puisqu'elle stipule que la fréquence d'apparition d'un phénomène aléatoire est une approximation de sa probabilité, la loi des grands nombres énonce en gros que la probabilité que l'écart entre la valeur observée de n variables aléatoires indépendantes et de même loi de probabilité et l'espérance mathématique de cette loi soit inférieur à un nombre aussi petit que l'on veut soit, presque nulle pour un nombre de tirages très grand.

La loi des grands nombres exige, pour que la fréquence soit assimilée à une probabilité théorique, que le nombre de tirages n soit infini, or concrètement cette condition n'est pas applicable dans la réalité puisque on n'a accès qu'a des échantillons de tailles finies. Ce manque nous oblige alors à accepter avec une marge d'erreurs contrôlée, que la moyenne empirique ou la fréquence observée, aussi précise soit-elle, n'est qu'une estimation de la vraie valeur de l'espérance mathématique. La précision de cette estimation est alors à la charge d'un autre résultat fondamental en théorie des probabilités, le théorème limite central.

Le deuxième résultat fondamental reliant les probabilités et la statistique est le théorème limite central ou comme on l'appelle en France le théorème de la limite centrée.

Ce théorème permet d'établir la convergence vers la loi normale d'une suite de variables aléatoires. Il se résume à considérer qu'une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, se comporte comme une loi normale.

De nos jours, ce théorème nous dit que pour $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance μ et de variance σ^2 finie, la variable aléatoire : $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sum_i X_i - n\mu}{\sigma}$ converge en loi lorsque n tend vers l'infini vers une loi normale centrée réduite.

Historiquement la première démonstration du théorème limite central est l'œuvre de Pierre-Simon de Laplace (de Laplace, 1812) qui généralise les résultats prouvés par de De Moivre en 1733 qui traite le cas particulier où les variables suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

Laplace parvient à faire l'approximation d'une loi binomiale de paramètres n et $p \in]0, 1[$ par la loi normale, et la première démonstration rigoureuse et générale est l'œuvre de Lyapounov au début du siècle dernier (Feller, 1968, p. 260).

Selon Appel (2013, p. 438), la dénomination de ce théorème est due à (Pólya, 1920) dans un travail et dont la traduction du titre en Français est : « *Sur le théorème central du calcul des probabilités* ».

Depuis, plusieurs versions et généralisations de ce théorème se sont succédées, notamment celle de Lindeberg (Saporta, 2006, pp. 66-67; Gnedenko, 1998, pp. 266-272). Ces généralisations se concentrent essentiellement sur l'affaiblissement des conditions nécessaires de ce théorème.

De nos jours, le théorème limite central se démontre à l'aide des fonctions caractéristiques (Saporta, 2006, p. 63) . Ce recours aux fonctions caractéristiques est désormais possible grâce au théorème de continuité de Levy[3], établi en 1922 permet l'équivalence entre la convergence des fonctions caractéristiques et la convergence en loi.

De la même manière que la loi des grands nombres, le théorème limite central exige que n tende vers l'infini pour pouvoir considérer l'approximation d'une somme de n variables aléatoires vers la loi normale mais, pour nous, ce fameux n est toujours fini. C'est ainsi que les statisticiens se contentent d'un n assez grand au moins raisonnable permettant de faire de bonnes approximations.

Ceci est traduit dans la littérature par les conditions que doivent accomplir les paramètres des lois pour se permettre de faire cette approximation. Ainsi et comme le justifie (Feller, 1968) à l'aide de nombreux exemples que si n est le nombre des tirages et p la probabilité de réalisation d'un évènement alors l'approximation par la loi normale est justifiée dès que $np(1-p) > 18$.

On pourra toutefois dans une séquence d'enseignement-apprentissage, envisager l'utilisation d'un outil technologique comme par exemple un tableur, afin de sensibiliser les apprenants quant à l'efficacité de ces approximations en jouant sur différentes valeurs des paramètres, mais aussi et plus encore l'assimilation du théorème limite central et son cas particulier le théorème de De-Moivre- Laplace qui met en tisse les liens entre la loi binomiale et la loi normale comme le met bien en évidence Dodge : « Le théorème De Moivre-Laplace établit la relation suivante : au fur et à mesure que n augmente, la probabilité cumulative binomiale tend à s'approcher de la probabilité cumulative normale. » (Dodge , 2006, p. 201)

Ce travail peut être un pas considérable quant à l'assimilation de ces différentes notions. Il prépare au mieux les apprenants aux nouvelles notions subséquentes à ces notions.

Prenons une illustration de l'utilité de l'approximation de la loi binomiale par la table de la loi normale.

Considérons une variable aléatoire suivant un loi binomiale de paramètres $n = 150\ et\ p = 0.4$ et calculons la probabilité, par exemple que. $p(X = 65) = C_{150}^{65}\, 0.4^{65}.\ 0.6^{85} = 0.0465067486$. Une dizaine de minutes et à l'aide d'une calculatrice sont nécessaires pour calculer cette probabilité.

On pourra gagner un temps considérable dans le calcul de cette probabilité à l'aide de la fonction « loi binomiale » d'une calculatrice programmable ou à l'aide d'un tableur : on aura ainsi la valeur exacte de cette probabilité qui vaut 0.04650675.

Toutefois le recours ici, puisque les conditions requises sont satisfaites, à l'approximation par la loi normale est le choix le plus judicieux. À l'aide de la table de la loi normale centrée réduite on obtient 0.04696868

La différence entre la valeur de cette probabilité obtenue à l'aide de la loi normale et sa valeur exacte est de l'ordre de $4.6193.\ 10^{-4}$ ce qui corrobore avec ce que Dodge appelle l'erreur

[3] Dont un énoncé figure dans (Appel, 2013, p. 362)

d'approximation de la loi binomiale par la loi normale : « L'erreur maximale d'une probabilité binomiale est de l'ordre de 0,011 quand la moyenne μ est à au moins 3σ des valeurs extrêmes 0 et n » (Dodge , 2006, p. 203).

Détaillons, à présent sur cet exemple le passage de la loi binomiale à la loi normale.
Dans notre situation $n = 150\ et\ p = 0.4$ ce qui donne :

$E(X) = np = 60$ et $V(X) = npq = 36 > 18$ donc les conditions de l'approximation sont satisfaites.

Pour répondre à notre question, on utilise la table de la loi normale pour calculer $p(X = 65)$ or la probabilité ponctuelle d'une loi normale qui est une loi continue est nulle. Pour pallier ce déficit on est amené à apporter une correction de continuité nécessaire pour le passage d'une loi discrète à une loi continue. Donc calculer $p(X = 65)$ avec la loi normale revient à calculer l'aire sous la courbe en cloche définie par $p(64.5 \leq X \leq 65.5)$.

On pose ensuite la variable centrée réduite $Z = \frac{X-60}{6}$

$$p(64.5 \leq X \leq 65.5) = p(0.75 \leq Z \leq 0.92) = \Phi(0.92) - \Phi(0.75)$$

Une simple lecture de la table de la loi centrée réduite nous donne le résultat recherché.

Mais qu'est-ce que cette correction de continuité ? Nous pensons qu'au niveau de la licence notamment en sciences de gestion cette notion un peu ambiguë pour les étudiants est la cause de nombreuses erreurs commises.

Reprenons l'exemple présenté par (Dodge , 2006, pp. 202-203) concernant ces propos.

Il considère $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100; 0.2)$ et il cherche à calculer $p(X > 27)$

La valeur exacte de cette probabilité est 0.0559 c'est le résultat obtenu avec la formule :

$$p(X > 27) = \sum_{k=28}^{100} C_{100}^{k} 0.2^{k}.\ 0.8^{100-k}$$

Pour aboutir au résultat il faut calculer 73 termes binomiaux difficilement maniables mais grâce à l'approximation tous ces calculs se ramènent à la seule opération

$$p(X > 27) \approx 1 - \Phi\left(\frac{27-100.02}{\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}}\right) = 1 - \Phi(1.75) = 0.0401$$

La comparaison des deux valeurs obtenues $0.0401\ et\ 0.0559$ n'est pas très mauvaise. Néanmoins elle peut être améliorée en apportant une correction de continuité égale à un demi-point ce qui permettra dans cet exemple d'obtenir $p(X > 27) = 0.0521$ plus proche de la valeur exacte que la première approximation. $p(X > 27) = 1 - \Phi\left(\frac{27-\frac{1}{2}-100.02}{\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}}\right) = 1 - \Phi(1.625)$

> Le rôle du facteur correctif est de permettre un meilleur passage d'une variable discrète (la variable binomiale) a une variable continue (la variable normale). « Graphiquement, il correspond à l'écart nécessaire pour compenser les débordements de la variable binomiale discrète par rapport à la loi normale. (Dodge , 2006, p. 203)

Les applications du théorème limite central et la loi des grands nombres vont, bien entendu, au-delà de ces problèmes d'approximations. Ils sont à la base entre-autre, de la constitution des intervalles de confiance qui précisent la qualité de l'estimation d'un paramètre statistique et des tests d'hypothèses.

Généralement, au niveau de l'enseignement dans une licence en gestion, on présente un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ d'une moyenne d'une variable aléatoire de variance connue à partir d'un échantillon de taille *n* par : $I = \left[\bar{X}_n - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ Où $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite. Cet intervalle n'est en fait qu'une conséquence du théorème central limite : lorsque les conditions requises sont remplies on peut obtenir un intervalle de confiance asymptotique de la moyenne *m* d'une variable aléatoire puisque : $\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

5. CONCLUSION

Les lois de probabilités aussi bien discrètes que continues ainsi que le théorème central limite et la loi des grands nombres jouent un rôle fondamental quant aux relations entre la statistique et les probabilités.

Une bonne assimilation de ces notions et des relations qu'elles entretiennent entre elles garantit le bon apprentissage des méthodes statistiques, cet apprentissage passe nécessairement par un travail assidu des apprenants.

Mais, il ne peut se faire que grâce à un enseignement adéquat qui met en évidence ces différentes relations grâce, en premier lieu, à une offre praxéologique institutionnelle qui reflète le plus fidèlement possible l'offre praxéologique de référence. Il n'est nullement question d'envisager cet enseignement comme une présentation d'un simple panorama de formules et de recettes bien faites.

BIBLIOGRAPHIE

APMEP. (2021). *Annales terminale générale année 2004.* Consulté le 03 29, 2022, sur apmep.fr: https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Amerique_Sud_S_nov_2004.pdf

APPEL, W. (2013). *Probabiltés pour les non probabilistes* (éd. 2e). H&K.

CANTONI, E., HUBER , P., et RONCHETTI, E. (2006). *Maîtriser l'aléatoire : Exercices résolus de probabilités et statistique.* Springer.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-265.

DE LAPLACE, P. S. (1812). *Théorie analytique des probabilités.* mme ve Courcier, imprimeur-libraire pour les mathématiques. Consulté le 04 25, 2022, sur: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8625611h/f7.image

DODGE, Y. (2006). *Premiers pas en statistique* (éd. 3e). Springer.

FELLER, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (éd. 3, Vol. 1). John Willey and Sons, Inc.

GNEDENKO, B. (1998). *Theory of Probability* (éd. 6e). CRC Press.

PÓLYA, G. (1920). Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlich-keitsrechnung und das Momentenproblem. *math Z, 8*(3), 171-181.

SAPORTA, G. (2006). *Probabilités, Analyse des données et Statistique* (éd. 2e). Technip.

UBØE, J. (2017). *Introductory statistics for Business and Economics.* Springer international Publishing AG.

Les contextes extra-mathématiques dans les manuels scolaires marocains; cas de la troisième année du collège

Sanaa Slimi
Ezzaim Laabid
Mustapha Ourahay
Université Cadi Ayyad Marrakech

RÉSUMÉ

L'utilisation de la réalité dans l'enseignement des mathématiques est une nouvelle tendance qui fait l'objet d'étude de plusieurs recherches, on donne l'exemple de l'éducation par les STEM (Science, Technology, Engineering and mathematics) et l'exemple des enquêtes internationales d'évaluation des acquis TIMSS et PISA, qui introduisent cette liaison dans les contextes des problèmes mathématiques objets de leurs items. Nous présentons dans ce travail une étude exploratoire des contextes extra-mathématiques –contextes réels- dans les exercices de trois manuels d'enseignement des mathématiques marocains de la troisième année du secondaire collégial. La grille de collecte des donnés utilisé dans cette étude est formé d'une catégorisation des contextes réels fait par le cadre d'analyse des enquêtes PISA. L'un des principaux résultats obtenus c'est l'ensemble des exercices qui sortent du contexte purement mathématique qui ne dépasse pas 10% dans les trois manuels étudiés.

1. INTRODUCTION

Cette étude consiste à analyser les manuels des mathématiques de la troisième année du secondaire collégial marocain, nous nous intéressons dans ces manuels aux problèmes mathématiques qui sont issus des contextes extra-mathématiques. Nous tentons dans cette étude de repérer ces contextes, puis d'identifier ceux qui sont les plus privilégiés par ces manuels.

Pour mener cette étude, nous nous basons sur la classification des contextes de PISA (Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves). Il est peut-être utile de rappeler que cette étude s'intéresse à la compétence globale de résolution de problèmes qui ne sont pas classiques pour les élèves et qui échappent au contexte familier. Pour PISA, la résolution de problèmes est parmi les compétences mathématiques générales. Celles-ci englobent plusieurs processus tels que : le maniement du langage mathématiques, la capacité de modélisation et de résolution de problèmes. L'objectif de l'enquête PISA est de « déterminer dans quelle mesure les élèves âgés de 15ans sont capable d'utiliser les mathématiques dans les situations et problèmes –dont la plupart s'inscrivent dans les contextes s'inspirant du monde réel- qui se présente à eux. » (OCDE, 2017, p. 66).

L'enquête PISA prend comme population ciblé les élèves à l'âge de 15 ans, c'est la raison pour laquelle nous choisissons de mener notre analyse des manuels pour la troisième année du secondaire collégial, les élèves à ce niveau scolaire au Maroc sont âgés d'au moins 15 ans. Il s'agit d'une année de fin de cycle. De plus, elle est la dernière année de l'enseignement obligatoire. Nous présumons qu'à la fin de cette année scolaire, les élèves devraient acquérir et cumuler les apprentissages nécessaires leur permettant de s'intègre dans la société.

Les questions qui guideront notre étude des manuels sont les suivantes :

- Quel est la place et le taux de l'utilisation des contextes extra-mathématiques dans les manuels des mathématiques marocains ?
- Quels sont les contextes dominants dans ces manuels ?

2. CONTEXTE D'UN PROBLEME MATHEMATIQUE

Pour commencer, il est nécessaire d'entamer la clarification du terme contexte. Nous donnons quelques définitions de ce terme dans un dictionnaire général (Larousse, 2022) ; dans un dictionnaire d'éducation (Legendre, 1993) et dans une étude didactique (Cotnoir, 2010).

Ainsi, on peut lire dans le Larousse : « nom masculin (latin contextus, assemblage) Ensemble des conditions naturelles, sociales, culturelles dans lesquelles se situe un énoncé, un discours. » première définition du dictionnaire LAROUSSE.

Alors que, pour Legendre (1993) : « un ensemble de circonstances entourant un fait et qui lui confère une valeur et une signification » (Legendre, 1993, p. 256).

Et enfin, pour Cotnoir (2010), C'est « la façon de présenter l'énoncé (symbolique, verbale, imagée ou avec manipulation). Les situations qui y sont présentées peuvent être issues de la vie de tous les jours, de la vie du jeune, des mathématiques ou d'autres disciplines scolaires. » (Cotnoir, 2010, p. 134).

Pour cette étude, on considère qu'un ***contexte mathématique*** est : tout énoncé d'exercice ou de problème qui se réfère directement à une activité mathématique et à des objets mathématiques sans la moindre référence à des idées ou des objets ne faisant pas partie du langage mathématique habituel.

Et qu'un contexte ***extra-mathématique***, est : tout énoncé d'exercice ou de problème mentionnant au moins un terme qui se réfère à des notions, des objets, etc. qui ne font pas parties du langage mathématique habituel.

Dans la section suivante nous aborderons les différents types de contextes mentionnés dans le cadre méthodologique de l'enquête PISA.

3. LES CONTEXTES UTILISES DANS L'ENQUETE PISA

Nous nous inspirons dans notre étude du cadre d'évaluation et d'analyse du cycle PISA pour cerner et définir les différents contextes des problèmes extra-mathématiques. Ces contextes sont définis par PISA comme suit :

Contexte personnel : « les problèmes classés dans cette catégorie portent sur les activités des individus, de leur famille et leurs pairs. » (OCDE, 2017, p. 80), exemples : les jeux, la santé individuelle, le sport, la préparation des repas etc.

Contexte professionnel : « les problèmes classés dans la catégorie des contextes professionnels se situent dans le monde du travail. » (OCDE, 2017, p. 80), exemples : la comptabilité et la gestion des salaires, le design et l'architecture, le contrôle de qualité et la prise de décisions dans le cadre professionnel etc.

Contexte sociétal : « les problèmes classés dans la catégorie des contextes sociétaux se situent dans la communauté (locale, nationale ou mondiale). » (OCDE, 2017, p. 80), exemples : les transports publics, la démographie, l'économie etc.

Contexte scientifique : « les problèmes classés dans la catégorie des contextes scientifiques traitent de l'application des mathématiques dans le monde naturel ainsi que dans des thématiques en rapport avec la science et la technologie.» (OCDE, 2017, p. 80), exemples : l'écologie, la génétique, le climat, la médecine etc.

Nous allons utiliser cette classification établie par PISA pour étudier les contextes extra-mathématiques dans les manuels scolaires de l'enseignement marocain.

4. LA COLLECTE DES DONNEES

Cette section propose une description des manuels scolaires, y compris les auteurs, le nombre d'exercices par thème, ainsi que le contenu mathématique du niveau scolaire sélectionné pour cette étude. Nous décrivons ensuite la méthode utilisée pour collecter les données.

Nous allons analyser trois manuels scolaires des mathématiques de la troisième année du secondaire collégial marocains. Ces manuels scolaires sont accrédités par le ministère du tutelle. Le premier manuel : « المفيد في الرياضيات »[1], publié et accrédité par le ministère d'éducation nationale en 2005, édition de 2014. Il est conçu par deux professeurs de l'enseignement secondaire qualifiant[2], un professeur de l'enseignement secondaire collégial et deux inspecteurs en mathématiques de l'enseignement secondaire. Le deuxième manuel : « المحيط في الرياضيات »[3], publié et accrédité par le ministère d'éducation nationale en 2005, version de 2011. Il est écrit par deux professeurs de l'enseignement secondaire collégial et un formateur au centre régional des métiers d'éducation et de formation. Le troisième manuel : « Maxi. Maths », publié et accrédité par le ministère d'éducation nationale en 2020, version de 2021. Il est écrit par trois professeurs de l'enseignement secondaire qualifiant et un formateur au centre régional des métiers d'éducation et de formation.

La partie de ces manuels qui nous intéresse dans l'analyse est la partie des exercices qui se trouvent à la fin de chaque chapitre, cette partie est supposée couvrir les différents problèmes dont la résolution doit se référer à l'activité mathématique sollicitée par chaque chapitre. Nous intéressons dans notre analyse seulement aux énoncés des exercices de la partie choisie. Rappelons que l'objectif de notre étude est de faire une analyse quantitative des contextes extra-mathématiques trouvés dans les énoncés des exercices des manuels choisis.

Ces manuels fournissent une banque de problèmes (exercices) destinés aux enseignants et aux élèves pour soutenir l'activité mathématique sollicitée par les programmes.

Chaque manuel se compose d'un ensemble de chapitres abordant les thèmes suivants : activités numériques, représentation des données et statistiques, ainsi que géométrie. Ces chapitres couvrent différents concepts mathématiques. Par la suite, nous présenterons chaque manuel étudié en détail.

Nous commençons par la répartition des exercices dans chaque manuel, elle est constituée de trois types d'exercices ou plus selon le manuel (voir tableau 2 en annexe). Le degré de difficulté et la progression des outils mathématiques utilisés varient au sein de chaque catégorie d'exercices.

[1] Hakkani, A. et al (2014).

[2] Au Maroc, le système éducatif est organisé en différents niveaux : le préscolaire (4-6 ans), le primaire (6-13 ans), le secondaire collégial (13-16 ans) et le secondaire qualifiant (16-18 ans). Les enseignants sont désignés en fonction de ces niveaux. Ainsi, un enseignant du secondaire qualifiant est chargé d'enseigner à ce niveau spécifique.

[3] Rakik, A. et al (2011).

Puis, la distribution des chapitres (concepts mathématiques) selon ces manuels scolaires (voir tableau 3 en annexe). Nous donnons l'exemple du thème activités numériques qui couvre les chapitres : identités remarquables, développement et factorisation, les puissances etc.

Les deux parties des manuels mentionnées précédemment revêtent une grande pertinence pour notre étude, car nous cherchons à identifier les contextes privilégiés dans ces manuels. Notre objectif est de repérer les chapitres qui donnent accès à ces contextes particuliers, ainsi que les catégories d'exercices dans lesquelles ces problèmes de contexte extra-mathématiques peuvent être classés.

Pour la collecte de donnés nous donnons à titre d'exemple une partie de la grille utilisée pour le troisième manuel sur deux chapitres, les puissances et les équations. Pour ces chapitres, nous avons recensé le nombre total d'exercices, le nombre d'exercices purement mathématiques et le nombre d'exercices avec d'autres contextes, selon notre répartition choisie. De plus, nous avons identifié les types d'exercices couverts par chaque exercice contextualisé.

Chapitre	Contexte	Nombre d'exercices	Type d'exercices
Les puissances 31 exercices	Mathématique	27	Tous les types
	Scientifique	4	J'approfondis
Les équations 26 exercices	Mathématique	22	Tous les types
	Professionnel	1	J'applique
		2	J'intègre
	Personnel	1	

Tableau 1. *Exemple de la grille d'analyse des manuels scolaires*

Les deux chapitres dans l'exemple ne touchent les contextes extra-mathématiques que par quatre exercices chacun, pour le premier chapitre des puissances, les exercices abordent uniquement le contexte scientifique et ils se situent dans la dernière catégorie « j'approfondis », Or, pour le deuxième chapitre d'équations, les exercices abordent les deux contextes professionnel et personnel et se situent dans les deux catégories « j'applique » et « j'intègre ».

Nous présenterons par la suite trois exemples d'exercices trouvés dans le même manuel, pour monter la différence des contextes :

Exercice 1 : Déterminer le nombre réel « a » tel que la somme de son tiers et son cinquième soit égale à l'inverse de $\frac{45}{16}$
Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes : $\frac{3}{4}x+\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}-x}{4}$; $(\sqrt{5}-2)x=\frac{x}{\sqrt{5}+2}-3\sqrt{5}$
Exercice 3 : Fatima a ajouté 15 à son âge, puis elle a multiplié le résultat par 3 et a trouvé 81. Quel est l'âge de Fatima ?

Figure 1*. Manuel Maxi Maths*[4]*, 2021 ; Exercices 26 et 27 (j'intègre) page 129 et exercice 34 (j'approfondis) page 130.*

[4] Khili, S. et al (2021).

Nous remarquons que les deux premiers exercices s'inscrivent purement dans le contexte mathématique or le troisième aborde l'âge d'une jeune fille en mentionnant son prénom, ce qui est un contexte extra-mathématique (personnel).

Nous avons suivi une démarche similaire aux deux exemples mentionnés précédemment pour analyser tous les chapitres des trois manuels scolaires de la troisième année du secondaire collégial.

5. RÉSULTATS

Après avoir rassemblé les données, nous avons organisé les résultats dans des tableaux détaillés qui indiquent le nombre d'exercices traitant chaque type de contexte. Ensuite, pour chaque type de contexte, nous avons identifié ces exercices dans chaque catégorie d'exercices spécifique à chaque manuel. Nous avons cherché à déterminer si les exercices liés aux contextes extra-mathématiques sont présents à tous les niveaux de difficulté des exercices ou s'ils sont uniquement proposés aux niveaux avancés.

Lors de la collecte des données, nous avons également pris en compte un autre détail important : le chapitre de statistiques de chaque manuel contient principalement des exercices liés à des contextes extra-mathématiques. Ainsi, afin de ne pas fausser les résultats de cette étude, il est essentiel de séparer ces exercices du reste. Les statistiques sont basées sur des études de la vie réelle, ce qui explique la présence de nombreux exercices de contextes extra-mathématiques. Cependant, notre étude vise à répondre à la question suivante : est-ce que les manuels scolaires marocains de ce niveau traitent spécifiquement les problèmes liés aux contextes extra-mathématiques ?

Les résultats sont présentés sous forme de diagrammes.

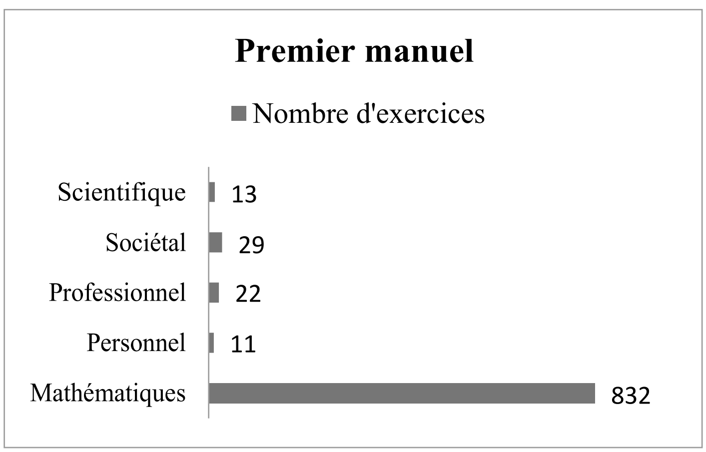


Diagramme 1. *La distribution des contextes d'exercices du premier manuel*

Dans le premier manuel, seulement 8,27% des exercices abordent des contextes réels, ce qui équivaut à 75 exercices sur un total de 907 exercices. Les 91,73% restants se concentrent uniquement sur des contextes purement mathématiques, ce qui représente 832 exercices sur le total de 907. Le type de contexte le plus abordé est le contexte sociétal, tandis que les trois autres types de contexte sont traités à des taux similaires, le contexte professionnel n'est pas visé d'un grand taux car seulement 13 exercices du total de 22 sont hors les statistiques. Environ 74,6% de ces exercices liés aux contextes extra-mathématiques se trouvent dans les dernières catégories d'exercices du manuel, à savoir les exercices de renforcement d'apprentissage et les exercices d'approfondissement, totalisant 56 exercices sur les 75 exercices au total d'exercices extra-mathématiques. Les exercices de statistiques constituent 20% de l'ensemble des exercices liés aux contextes extra-mathématiques, soit un total de 15 exercices sur les 75 exercices au total. Cependant, ce chapitre de statistiques ne représente que 5% de l'ensemble des chapitres du manuel.

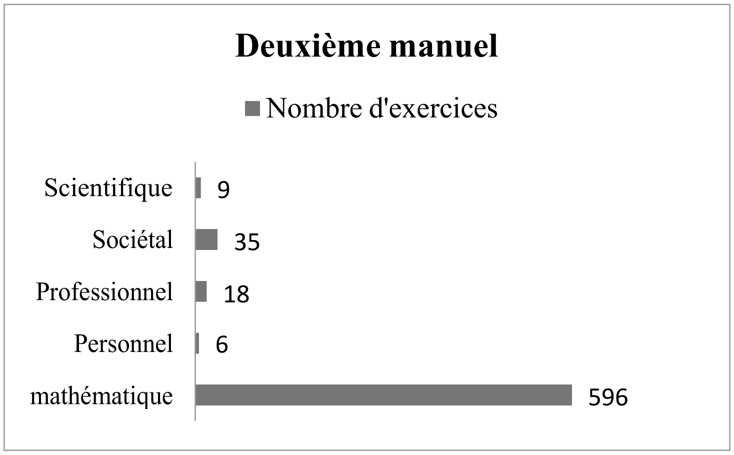


Diagramme 2. *La distribution des contextes d'exercices du deuxième manuel*

Dans le deuxième manuel, seuls 10,24% des exercices abordent des contextes réels, soit un total de 68 exercices sur les 664 exercices au total. Les 89,76% restants se concentrent exclusivement sur des contextes purement mathématiques, représentant ainsi 596 exercices sur l'ensemble. Le type de contexte le plus abordé est le contexte sociétal, avec un pourcentage de 51,4% et un nombre d'exercices de 35, dont 15 exercices appartenant au chapitre des statistiques. En revanche, le contexte personnel est le moins abordé dans ce manuel, avec un pourcentage de seulement 8,8%, soit 6 exercices sur les 68 exercices au total. Environ 63,2% de ces exercices extra-mathématiques se trouvent dans les dernières catégories d'exercices du manuel, à savoir les exercices de renforcement d'apprentissage, les exercices d'approfondissement et les exercices à concourir.

Les exercices de statistiques constituent 20,41% de l'ensemble des exercices liés aux contextes extra-mathématiques, soit un total de 20 exercices sur les 68 exercices au total. Cependant, ce chapitre de statistiques ne représente que 5% de l'ensemble des chapitres du manuel.

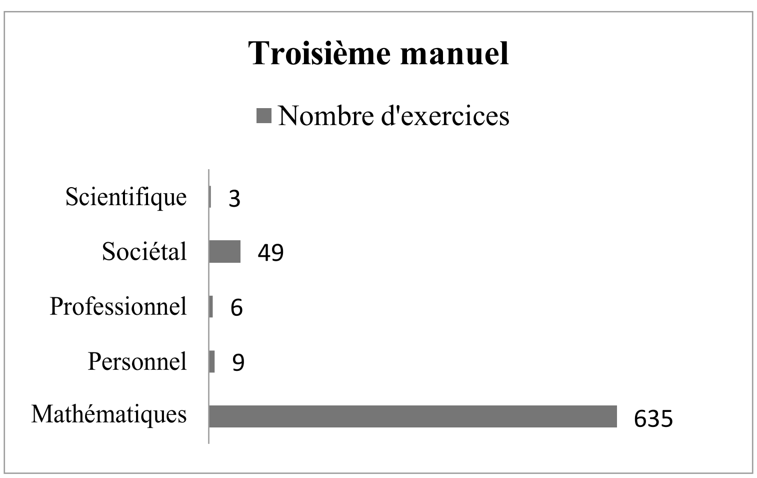


Diagramme 3. *La distribution des contextes d'exercices du troisième manuel*

Dans le troisième manuel, seuls 9,54% des exercices abordent des contextes réels, ce qui correspond à un total de 67 exercices sur les 702 exercices au total. Les 90,46% restants se concentrent exclusivement sur des contextes purement mathématiques, représentant ainsi 635 exercices sur l'ensemble. Le type de contexte le plus privilégié est le contexte sociétal, avec un pourcentage de 73,1% et un nombre d'exercices de 49, dont 5 d'entre eux appartiennent au chapitre des statistiques. En revanche, le contexte scientifique est le moins abordé dans ce manuel, représentant seulement 4,4% avec 3 exercices sur les 67 au total. Environ 64,1% de ces exercices extra-mathématiques se trouvent dans la dernière catégorie d'exercices du manuel, à savoir les exercices d'approfondissement.

Les exercices de statistiques représentent seulement 8,95% de l'ensemble des exercices liés aux contextes extra-mathématiques, ce qui correspond à un total de 6 exercices sur les 67 exercices au total. Cela est significativement inférieur par rapport aux deux autres manuels.

Le graphique présenté par la suite illustre la répartition des contextes dans les trois manuels sélectionnés. Les trois manuels abordent les contextes mathématiques de manière presque similaire, représentant environ 90% du contenu, tandis que les contextes extra-mathématiques représentent environ 10% du contenu.

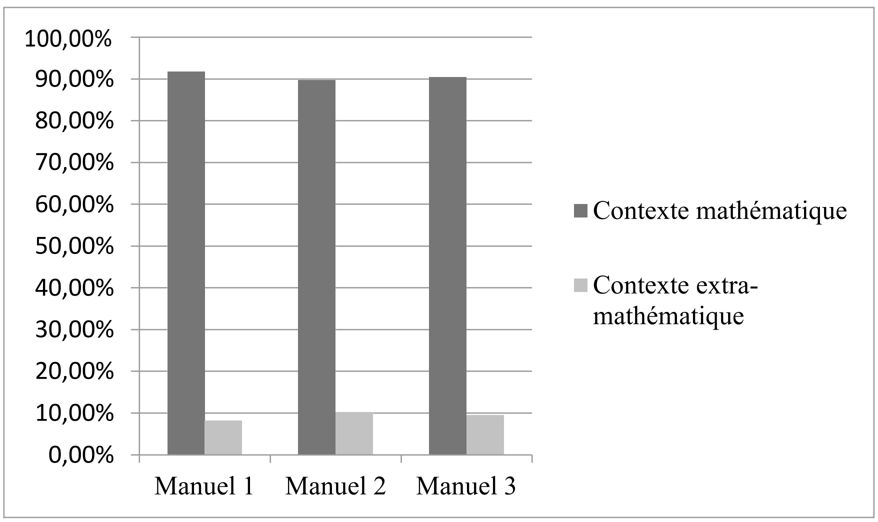


Diagramme 4. *La répartition des contextes dans les trois manuels*

6. CONCLUSION

Les résultats obtenus révèlent plusieurs aspects sur les problèmes extra-mathématiques dans les manuels de la troisième année du secondaire collégial marocains. Nous présenterons par la suite des remarques sur ces résultats obtenus qui nous mènent chacune à poser des questions en termes de perspectives de recherche.

En tant que remarque principale, il est important de souligner que ces manuels ne consacrent pas plus de 10% des problèmes de résolution aux contextes extra-mathématiques. Cela soulève la question de savoir ***si la place accordée à la réalité dans les exercices de ces manuels est en accord avec les objectifs de l'enseignement marocain, des orientations pédagogiques et des programmes d'enseignement des mathématiques pour la troisième année du secondaire collégial au Maroc***. Une étude approfondie de ces documents est donc nécessaire pour évaluer cette conformité.

La deuxième observation que nous pouvons souligner est que ces manuels n'abordent pas toutes les catégories de contextes de manière équivalente. Il est notable que les trois manuels analysés accordent une plus grande importance aux contextes sociétaux, tandis que les contextes scientifiques sont moins abordés. Cette constatation amène à se demander ***si cela pourrait expliquer les faibles scores des élèves marocains dans les enquêtes de PISA***. Il se peut qu'ils ne soient pas habitués à résoudre des problèmes contextualisés qui couvrent les quatre catégories de contextes, telles que celles utilisées par PISA, où chaque catégorie de contexte représente 25% des problèmes (OCDE, 2017, p. 81).

Une troisième observation concernant les résultats de l'analyse concerne la répartition des contextes extra-mathématiques dans les catégories d'exercices des trois manuels étudiés. Plus de 50% de ces contextes se trouvent dans les catégories d'exercices de renforcement et d'approfondissement, laissant ainsi un faible pourcentage d'exercices de contextes réels dans les catégories d'application des apprentissages. Cela soulève la question de savoir si l'utilisation de contextes réels dans les problèmes mathématiques est nécessairement liée au degré de développement des concepts mathématiques en eux-mêmes. En d'autres termes, ***est-il nécessaire que les concepts mathématiques faisant l'objet de l'apprentissage soient bien développés et maîtrisés par les élèves avant de les appliquer dans des situations réelles ?*** Nous formulons comme hypothèse que cela pourrait être dû aux objectifs préalablement définis par les programmes d'enseignement des mathématiques au Maroc, c'est-à-dire, si ces objectifs se concentrent davantage sur l'appropriation des outils mathématiques par les élèves ou sur l'utilisation de ces concepts dans la résolution de problèmes de la vie réelle.

En tant que dernière observation, il convient de noter que le chapitre "statistiques" occupe une part importante des contextes réels dans les deux premiers manuels examinés. La question qui se pose est de savoir ***si les exercices contextualisés de ce chapitre peuvent être considérés comme résolution de problèmes***. Étant donné que les statistiques est une discipline qui étudie les populations, on peut considérer que le contexte extra-mathématique fait partie intégrante de cette discipline. Ainsi, les exercices contextualisés dans le domaine des statistiques peuvent être perçus comme une forme de résolution de problèmes mathématiques dans un contexte réel.

BIBLIOGRAPHIE

COTNOIR, G. (2010). Evolution de l’utilisation des contextes dans les chapitres introductifs à l’algèbre dans les manuels scolaires québécois de 1960 à nos jours (Mémoire en vu de maîtrise en sciences de l’éducation). Université de Sherbrooke, Faculté d’éducation, Canada.

HAKKANI, A. et al (2014). المفيد في الرياضيات, السنة الثالثة من التعليم الثانوي *[Le <livre>utile en mathématiques, troisième année du secondaire collégial]*. Casablanca : Dar Attakafa.

KHILI, S. et al (2021). *Maxi. Maths le manuel, 3ème année du cycle secondaire collégial*, Mathématiques. Casablanca : Editions Plus.

LAROUSSE. (s.d.). Contexte. Dans Dictionnaire français en ligne Larousse. Récupéré le 29 avril 2022, à partir de https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/contexte/18593.

LEGENDRE, R. (1993). *Dictionnaire actuel de l’éducation*. (2e éd.). Montréal : Guerin.

OCDE (2017). *Cadre d’évaluation et d’analyse de l’enquête PISA pour le développement* : Compétences en compréhension de l’écrit, en mathématiques et en sciences, version préliminaire, (p. 63-92) Éditions OCDE, Paris.

RAKIK A. et al (2011). المحيط في الرياضيات, السنة الثالثة ثانوي إعدادي *[Le <livre> englobant en Mathématiques, la troisième année du secondaire].* Casablanca : La Société Marocaine de Distribution du Livre.

ANNEXE

Premier manuel	Deuxième manuel	Troisième manuel
- Exercices d'application ; - Exercices de soutien des apprentissages ; - Exercices de renforcement des apprentissages ; - Exercices d'approfondissement ;	-Exercices d'application ; -Questions à choix multiples ; -Exercices de soutien des apprentissages ; -Exercices de renforcement des apprentissages ; -Exercices d'approfondissement et de recherche ; -A concourir ;	-J'applique ; -J'intègre ; -J'approfondis ;

***Tableau 2.** Répartitions des types d'exercices selon les trois manuels analysés*

Activités numériques	Activités de représentation des données et de statistiques	Géométrie
✓ Identités remarquables ✓ Développement et factorisation ✓ Les puissances ✓ Les racines carrées ✓ Ordres et opérations ✓ Equations ✓ Inéquations ✓ Système de deux équations de premier degré à deux inconnues	✓ Fonctions linéaires ✓ Fonctions affines ✓ Statistiques	✓ Théorème de Thalès ✓ Théorème de Pythagore ✓ Calcul trigonométrique ✓ Les angles inscrits et les angles au centre ✓ Les triangles semblables ✓ Vecteurs et translations ✓ Repère dans le plan ✓ Equation d'une droite ✓ Géométrie dans l'espace

***Tableau 2.** Répartition des chapitres dans chaque thème*

Groupe de travail n°2 (GT2)

Conditions permettant la réalisation du projet de l’interdisciplinarité

Bilan du GT 2

CONDITIONS PERMETTANT LA RÉALISATION DU PROJET DE L'INTERDISCIPLINARITÉ

Responsables

Imed Kilani[1] – Rachid Bebbouchi[2] – Jeanne Koudogbo[3]

L'édition 2022 du colloque d'ADiMA3-Tunisie a pour objectif de porter un regard scientifique sur l'interdisciplinarité dans l'enseignement et la recherche en mathématiques et en didactique des mathématiques en Afrique.

Le groupe de travail GT2 s'inscrit dans cette lignée en développant l'un des axes du colloque à savoir : **Conditions permettant la réalisation du projet de l'interdisciplinarité**.

L'objectif de ce groupe de travail est de connaître non seulement les rouages d'une démarche interdisciplinaire, mais surtout d'étudier les facteurs qui conditionnent l'avancée du projet de l'interdisciplinarité. Les relations enseignant, élève, savoir mathématique et autres disciplines, milieu-contexte jouent, en effet, un rôle essentiel pour l'édifice de ce projet. Ceci occasionne des questionnements, entre autres, sur la formation disciplinaire et didactique des enseignants qui conduisent ce projet tant dans les lieux de formation des maîtres que dans les écoles.

Dans ce groupe de travail, cinq communications ont eu lieu :

1. **Analyse du rapport institutionnel de la praxéologie modélisation relativement au développement de la pensée algébrique dans la transition primaire/collège au Maroc (**Saïd ABOUHANIFA & Hassane SQUALLI)

Dans cette communication, Abouhanifa a présenté les résultats de l'analyse du rapport institutionnel de la praxéologie modélisation relativement au développement de la pensée algébrique dans la transition primaire/collège, via une analyse des programmes et des manuels officiels de la 6ème année primaire et de la 1ère année du collège au Maroc. Ces analyses s'appuient sur le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (MPRPA) qui s'inspire de la théorie anthropologique du didactique et qui s'est développé dans le cadre du projet international entre le Canada, le Maroc, le Bénin et la Tunisie. Il a présenté spécifiquement une analyse du rapport institutionnel conduite sur la base des programmes et des manuels officiels pour explorer la manière dont ces curricula préparent les élèves à l'entrée dans l'algèbre à travers la praxéologie modélisation.
Les discussions étaient fructueuses : place de la sémantique et de la syntaxe dans la pensée algébrique, A quel moment et sous quelle forme peut-on introduire la pensée algébrique à l'école primaire…

2. **L'influence du formalisme mathématique dans l'apprentissage de la physique dans les lycées congolais (**Chris Poppel LOUYINDOULA BANGANA YIYA, Fernand Alfred MOUNGABIO MALONGA & Ghislain Amédée MOUSSOUNGOU)

[1] Université Virtuelle de Tunis – Tunisie. kilanis2006@yahoo.fr
[2] Université des Sciences et Technologies Houari Boumediene – Algérie. rbebbouchi@hotmail.com
[3] Université de Sherbrooke – Canada. jeanne.koudogbo@usherbrooke.ca

Dans cette communication Malonga a mis en évidence les aspects négatifs de l'interdisciplinarité physique-mathématiques dans les lycées d'enseignement général de la République du Congo. Il a noté que les mathématiques en physique sont omniprésentes et que la mathématisation de certains concepts physiques représente un obstacle à la maîtrise du sens physique des concepts. Il a souligné donc l'importance de repenser les règles de cohabitation physique-mathématiques afin d'optimiser le processus d'enseignement-apprentissage de la physique.
Les discussions ont tourné principalement autour de la nécessité de présenter et d'expliquer le cadre théorique dans lequel s'inscrit ce travail de recherche car dans la présentation aucun cadre théorique n'a été présenté. Les différenciations de raisonnement entre mathématiques et physique ont été aussi au cœur des discussions.

3. **La modélisation mathématique d'un phénomène physique : une approche expérimentale possible pour l'enseignement de l'intégrale** (Inen AKROUTI)

Dans cette communication Akrouti a souligné la complexité de l'objet *intégrale* qui se caractérise par une structure qui lui donne une nature multiforme. Selon elle, cette pluralité de forme nécessite une attention particulière afin de faire comprendre aux étudiants les idées principales qui fondent l'objet *intégral*. Elle est partie d'une situation physique *simple* qui propose un phénomène réel. Cette situation a pour finalité de faire sortir les étudiants de leur confort et permet d'aborder l'intégrale par des approximations.
Akrouti a été questionnée sur le lien entre son travail de recherche et le concept de rationalité qu'elle a développé dans son cadre théorique. Beaucoup des présents se sont aussi demandés l'intérêt de la situation mathématique objet d'expérimentation, qu'ils considèrent « simple » pour des étudiants en 1$^{\text{ère}}$ année préparatoire. Akrouti, a souligné que malgré cette « simplicité » la situation a permis de dégager des difficultés auprès des étudiants concernant l'approche de l'intégrale par les approximations.

4. **Enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre au Bénin : Analyse des prescriptions** (Sègbégnon Eugène OKE, Marc Gervais AFFOGNON, Donatien SOGBAVI, Ahonankpon Florent GBAGUIDI, Pierre DOSSOU DOSSA & Magloire COSSOU.

Dans cette communication Sogbavi a présenté une analyse des manuels de mathématiques de la dernière année de l'école primaire et de la première année du collège au Bénin. Cette analyse avait pour objectif de faire l'état des lieux des ressources institutionnelles mises à la disposition des enseignants pour le développement de la pensée algébrique. Il a montré que les activités mathématiques étudiées sont essentiellement tournées vers le calcul au détriment d'autres habiletés à développer.
Les discussions étaient riches. Elles ont tourné d'abord autour du projet « apprendre ». Ensuite, Sogbavi a présenté les trois types de « Potentiel algébrique » d'une situation mathématique pour l'élève : « fort », « faible » et « nul ». Les participants se sont débattus autour des ambigüités concernant la signification de ces trois terminologies et notamment celle à « potentiel faible » qui semble, paradoxalement, plus riches que les deux autres.

5. **Géométrie dynamique, un instrument pour la construction des sens sur le concept de droite tangente vue sous le prisme de la limite : une étude de cas auprès des lycéens de classe de première scientifique au Cameroun** (Giscard NGUEMBOU NANA).

Dans sa communication Nguembou a mis en évidence l'intérêt de l'usage de l'environnement de géométrie dynamique, dans l'opérationnalité du point de vue présentant la droite tangente sous le prisme de la limite. Il a montré comment des tâches centrées sur ce point de vue et, articulant formes opératoires et formes prédicatives des connaissances, aident à provoquer chez le sujet le développement des perspectives locales, fortement décriées comme absentes chez ce dernier par la recherche.

Nguembo, a développé cette recherche en référence à la théorie des champs conceptuels. Or, certains participants se sont demandé comment ce cadre théorique a pu être exploité dans cette recherche.
L'expérimentation a permis de mettre en évidence la difficulté de la notion de l'infinie en lien avec la notion de limite « dynamique » dans le cas de la tangente vue selon une approche de géométrie dynamique.
Le travail est très intéressant mais a soulevé la problématique de son lien avec la thématique de l'interdisciplinarité.

Rapport institutionnel de la praxéologie modélisation relativement au développement de la pensée algébrique dans la transition primaire/collège au Maroc

Saïd Abouhanifa
CRMEF CS – Settat- Maroc
Hassane Squalli
Université de Sherbrooke Canada

RÉSUMÉ

Nous présentons les résultats de l'analyse du rapport institutionnel de la praxéologie modélisation relativement au développement de la pensée algébrique dans la transition primaire/collège, via une analyse des programmes et des manuels officiels de la 6ème année primaire et de la 1ère année du collège au Maroc. Ces analyses s'appuient sur le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (MPRPA) qui s'inspire de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1997) et qui s'est développé dans le cadre du projet international entre le Canada, Maroc, Bénin et Tunisie, intitulé : « Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie. État des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre ». Ce modèle de référence est structuré autour de trois praxéologies mathématiques régionales (PMR) 1) Généraliser. 2) Modéliser et 3) Calculer. Dans le cadre de ce texte, nous nous intéressons à l'analyse du rapport institutionnel conduite sur la base des programmes et des manuels officiels pour explorer la manière dont ces curricula préparent les élèves à l'entrée dans l'algèbre à travers la praxéologie modélisation.

Mots clés : Modélisation, rapport institutionnel, pensée algébrique, curriculums et manuels scolaires.

1. INTRODUCTION

La recherche s'inscrit dans le cadre du projet «« Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie. État des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre » (Najar, Squalli, Adihou et Abouhanifa, 2021) financé par le programme APPRENDRE de l'Agence universitaire de la Francophonie (AUF). Le projet implique la collaboration entre des équipes de recherche du Bénin, du Canada, du Maroc et de la Tunisie. En effet, l'enjeu de l'enseignement des mathématiques dans les trois pays, concerné par l'étude, à ce moment charnière de la transition entre l'école primaire et le collège, réside dans le passage de l'arithmétique enseignée au primaire à l'algèbre enseignée au collège. Pour étudier la transition arithmétique algèbre, de nombreuses recherches ont été menées sur les ressemblances et les différences qui existent entre l'arithmétique et l'algèbre. Selon Kieran (1992, 1994) entre l'arithmétique et l'algèbre résident à la fois de fausses continuités et des discontinuités. Vergnaud (1986) évoque une double rupture épistémologique lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre alors que Filloy et Rojano (1989) parlent d'une *coupure didactique* qui aurait lieu le long de la ligne d'évolution d'une pensée arithmétique à une pensée algébrique. À la fin des années 1990, de nouvelles perspectives curriculaires ont vu le jours grâce au mouvement « Early algebra ». Fortement inspiré des travaux de Kaput (1998), ce mouvement a remis en question l'approche transitionnelle classique de l'algèbre et a ouvert des perspectives de recherche et curriculaires ainsi que la mise à jour de la formation initiale et continue des enseignants. Ce courant met l'accent sur le développement de la pensée algébrique dès le primaire sans usage du langage littéral de l'algèbre. Selon certains chercheurs (Kaput, 1998 ; Carraher, 2007 ; Squalli, Mary et Marchand, 2011, Squalli, 2000) cette nouvelle approche ne doit pas être envisagée comme une pré-algèbre mais plutôt comme une stratégie pour enrichir les contenus mathématiques enseignés au primaire, sur le plan de la conceptualisation, des modes de raisonnements, et des registres de représentation.

Dans le cadre de cette communication, nous présentons les résultats l'analyse du rapport institutionnel de la praxéologie modélisation conduite sur la base d'une analyse des programmes et des manuels officiels de la 6ème année primaire et de la 1ère année de collège, au Maroc. Il s'agit plus précisément de mettre au jour le potentiel des curriculums du Maroc à développer la pensée algébrique. Ces analyses s'appuient sur le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (MPRPA) (Najar, Squalli, Adihou et Abouhanifa, 2021) qui s'inspire de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1997) et qui s'est développé sur la base de plusieurs travaux autour de la pensée algébrique (Bednarz, Kieran et Lee 1996, Lins et Kaput 2004 ; Carraher et Schliemann 2007, Radford 2014 et 2018, Squalli et al. 2019). Ce modèle de référence pour notre recherche est structuré autour de trois praxéologies mathématiques régionales (PMR) 1) Généraliser. 2) Modéliser et 3) Calculer. Chacune de ces PMR se décline en praxéologies mathématiques locales (PML) puis en praxéologie mathématiques ponctuelles (PMP). Dans cette recherche, on s'intéresse tout particulièrement à la praxéologie mathématique régionale, modéliser.

2. L'APPROCHE MODÉLISATION

Dans tout le travail, nous considérons le terme modélisation au sens large qui est développé dans les travaux de Chevallard (1989) et prend comme référence les notions de système et de modèle, en prenant en compte la réversibilité du processus de modélisation. Selon Chevallard (1989) un schéma simplifié d'une démarche de modélisation suppose essentiellement deux registres d'entités : un système, mathématique ou non mathématique, et un modèle (mathématique) de ce système. Le processus de modélisation comporte alors schématiquement, trois étapes : 1) la définition du système à étudier ; 2) la construction du modèle ; 3) l'étude (mathématique) du modèle produit, dans le but de produire des connaissances relatives au système étudié.

À l'aide de ce schéma simplifié, expliquons les grandes lignes de la modélisation algébrique. Notons d'abord que la construction du modèle algébrique, à partir de la situation initiale (extra-mathématique ou mathématique), nécessite la mise en évidence d'opérations (au moins une), de relations, des variables pertinentes ainsi que de relations existant entre elles. C'est la manière dont les variables pertinentes sont reliées entre elles, soit la structure de la situation initiale, qui constitue l'objet de l'étude. En choisissant les variables et les opérations pertinentes, et peut-être des relations, on est amené implicitement à choisir un système algébrique, qui est le domaine des variables et qui est muni de ces opérations et relations. Le travail algébrique de transformation de la forme du modèle est conduit, jusqu'à arriver à une forme à partir de laquelle on peut tirer les connaissances espérées de la situation initiale.

Une approche didactique de l'algèbre basée sur des activités de modélisation, offre le moyen d'arrimer l'algèbre au monde réel. Ce qui, pense-t-on, rendrait l'enseignement de l'algèbre plus significatif pour les élèves et moins replié sur elle-même. Un de ses objectifs est d'apprendre à modéliser, objectif qui est rarement important dans les curriculums traditionnels de mathématiques. Pour les besoins didactiques, les auteurs de manuels traditionnels "fabriquent" des problèmes artificiels sur lesquels les élèves vont développer leur savoir algébrique. De ce fait, une grande partie du travail de modélisation ne sera pas traitée par les élèves, notamment ce que Pollak (1997) appelle l'analyse de la situation réelle et la formulation de la question idéalisée. La stratégie qui sera le plus souvent utilisée consiste à amener l'élève à résoudre des exercices algébriques scolaires et, par la suite, à appliquer cet apprentissage à la résolution de problèmes en dehors des mathématiques. Mais même dans ce cas, les situations réalistes utilisées sont souvent artificielles.

Selon Squalli (2000), l'approche « modélisation », par contre, utilise la modélisation algébrique très tôt dans le cursus comme outil pour étudier diverses situations ou phénomènes réels, et aussi, comme outil pour la mise en place du calcul algébrique. La première fonction de la modélisation est familière, la seconde l'est beaucoup moins. Comme l'explique Chevallard (1989), la modélisation est un processus réversible, le système modélisé peut apparaître, à rebours, un modèle de son modèle. Par exemple, la notion de vecteur est un modèle de la notion de force en physique. Mais cette dernière peut être vue comme un modèle de la notion de vecteur et être un point de départ de l'initiation à l'algèbre linéaire.

Cette manière d'utiliser la modélisation peut être efficace pour approcher des concepts ou des procédures très complexes pour les élèves d'un certain niveau (Ibid.). Par exemple, note (Squalli, 2000) il est clair qu'un élève en début de secondaire ne dispose d'aucun moyen mathématique formel pour établir que : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$ pour tout n et de découvrir l'idée que le terme de gauche de l'égalité s'approche de plus en plus de 1 lorsque *n* devient de plus en plus grand. Considérons le problème suivant : Alain décide de manger sa pizza de la manière suivante : À l'étape 1, il commence par en manger la moitié, à l'étape 2 il mange la moitié du reste, à l'étape 3 il mange la moitié du reste de l'étape 2, et ainsi de suite. Quelle est la part de pizza qu'Alain aura mangé à l'étape 100 ?

Il n'est pas difficile pour les élèves de dresser le tableau 1 :

Étapes	1	2	3	…	100
Nouvelle part mangée	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	[redacted]	…	$\frac{1}{2^{100}}$
Part restante	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	[redacted]	…	$\frac{1}{2^{100}}$

Tableau 1. *Les étapes de calcul*

À L'étape 100, Alain aura donc mangé : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}$ de sa pizza. Il lui restera alors $\frac{1}{2^{100}}$ de sa pizza, c'est-à-dire qu'il aura mangé en tout jusqu'à cette étape $1-\frac{1}{2^{100}}$ de la pizza. D'où l'égalité : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}=1-\frac{1}{2^{100}}$. On peut alors dire que cette situation fournit un modèle de cette égalité complexe. De là, il n'y a qu'un pas pour que l'élève arrive à la généralisation : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$, qui montre que l'on s'approche de plus en plus de 1, lorsque *n* est de plus en plus grand. L'élève approcherait cette idée non pas en se basant sur le fait que la suite de terme général $1-\frac{1}{2^n}$ est croissante et tend vers 1 lorsque *n* tend vers l'infini, mais en se basant sur la situation réaliste de l'exemple du problème de la pizza. En effet, il n'est pas hors de portée de l'élève de comprendre que plus le nombre d'étapes augmente, plus la part de pizza restante est petite, et donc plus la part totale de la pizza mangée par Alain s'approche de 1.

Dans une activité de modélisation, l'objet du travail revient à étudier algébriquement la structure de la situation (idéalisée), soit à décrire et à transformer le système de relations entre les variables à l'aide d'une ou plusieurs formes algébriques, lesquelles permettent de fournir les éclairages voulus relativement au système de rapports entre ces variables (Ibid.).

3. La notion de praxéologie

La théorie anthropologique du didactique (TAD) permet de modéliser toute pratique humaine ou sociale en termes de praxéologies ou organisations praxéologiques (Chevallard, 1989). Celle-ci permet de décrire et d'analyser toute activité en la décomposant en un quadruplet (tache, technique, technologie et théorie). Selon ce modèle, le rapport institutionnel peut être analysées par un découpage en un système de tâches (t) appartenant à des types de tâches (T) (Bosch et Chevallard, 1999). Toute tâche t est accomplie au moyen d'une technique. Chaque technique est justifiée à son tour par une technologie. Celle-ci correspond à un discours rationnel qui permet d'expliquer la technique. Finalement, toute technologie repose elle-même sur les fondements d'une théorie (Chevallard, 1990). Cette décomposition en praxéologies permet de modéliser l'activité mathématique pour en favoriser l'analyse.

Les praxéologies s'emboîtent les unes dans les autres selon les différents niveaux : ponctuel, local, régional et global. Cet emboîtement suit la hiérarchie des niveaux de codétermination didactique. Le sujet est une organisation ponctuelle, le thème est une organisation locale, le secteur est une organisation régionale, le domaine est une organisation globale et la discipline est commune à tous les domaines. Dans une institution donnée, les praxéologies existent rarement comme praxéologies ponctuelles.

4. Modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique

Le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (MPRPA) (Najar et al, (2021), pour caractériser l'activité mathématique, s'organise en trois praxéologies mathématiques régionales (PMR) : Généraliser (G), Modéliser(M) et Calculer (C). Chacune d'elle s'organise autour de praxéologies locales. La PMR « Généralisation » se décline en deux PML : Généralisation de régularités et Généralisation de règles, de formules, de loi et d'algorithmes. La PMR « Modélisation » se décline en trois PML : Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des expressions numériques ; Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des équations et Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des fonctions. La PMR « Calcul » se décline quant à elle en deux PML : Calcul sur des expressions numériques et Calcul sur des expressions algébriques. La figure 1 présente l'architecture du MRPA investi dans le cadre de cette étude.

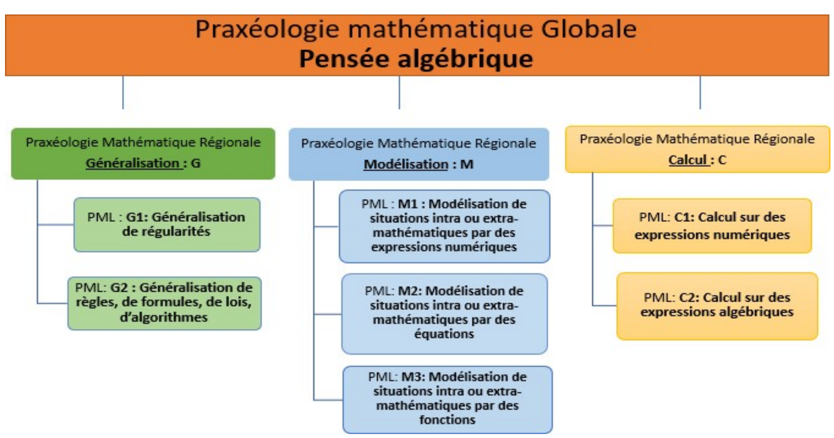


Figure. 1. *Architecture du MPRPA, Najar et al. (2021)*

5. MÉTHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

Pour analyser le rapport institutionnel de la praxéologie modélisation conduite sur la base des programmes et des manuels officiels dans les niveaux 6e primaire et 1er collège, nous avons utilisé la méthodologie d'analyse décrite dans le cadre du projet -AUF (Najar et al, 2021) et qui s'inspire des travaux de l'OIPA (Observatoire International de la Pensée Algébrique), notamment ceux de Bronner et Larguier (2018). Cette méthodologie s'organise en trois phases. Il s'agit en premier lieu de repérer les instances et les textes officiels, en second lieu, il est question d'identifier les données à analyser dans les ressources officielles retenues à l'étude et en référence à notre problématique de transition pour les deux niveaux d'enseignement et finalement, il y a lieu d'analyser les organisations mathématiques développées dans les manuels en référence au modèle MPRPA. Cette dernière phase a été amorcée par un protocole d'analyse qui permet d'analyser les activités de modélisation proposées aux élèves en repérant à un niveau macro les praxéologies régionales et locales, puis à un niveau micro les genres et types de taches évoqués par ces activités. Dans l'analyse, nous avons opté pour le choix d'un manuel scolaire (Aljaid, 2020- Maroc) pour la 6^{e} année du primaire, en langue arabe et le guide de l'enseignant qui lui est associé.

Dans un premier temps, nous avons réalisé une analyse écologique du processus de modélisation mathématique qui s'organise autour de deux notions : l'habitat qui désigne les lieux de vie et l'environnement conceptuel de l'objet de savoir et la niche qui désigne la fonction de cet objet dans le système des objets avec lesquels il interagit.
Nous prévoyons l'étude du rapport institutionnel par une analyse écologique en utilisant l'articulation entre les notions d'habitat et de niche, dans le but d'étudier la place de la modélisation dans les programmes et les manuels scolaires. Pour l'habitat de la modélisation, nous déterminons les lieux de présence de la modélisation dans les programmes et les manuels scolaires et de l'importance que celle-ci a dans ces lieux. Pour rendre compte de cette place, nous faisons état des travaux de la thèse de Bui Thi Khang (2005), pour considérer une observation quantitative en introduisant la notion de densité d'apparition de la modélisation dans les programmes et les manuels scolaires, relativement à un chapitre, la « densité D de chapitre ».
Dans le deuxième temps, Pour déterminer l'importance accordée à la modélisation dans la résolution de problèmes extra mathématiques apparus dans ce manuel scolaire, nous avons étudié le rapport institutionnel à la modélisation algébrique à travers l'analyse praxéologique des trois rubriques de ce manuel scolaire.
En exploitant les orientations du protocole d'analyse et la grille assujettie, l'analyse effectuée d'un manuel scolaire a porté sur l'identification des tâches mathématiques et leur caractérisation selon leur potentiel algébrique, Najar et al. (2021). Il s'agit de faire la lecture des tâches du manuel scolaire du 6e primaire (Aljaid, 2020) pour sélectionner uniquement les tâches qui font intervenir une ou plusieurs opérations de l'arithmétique (+, -, *, /). Ainsi, les tâches relevant des quatre domaines sont retenues, à savoir, D1 : Nombres et Calcul, D2 : Grandeurs et mesures, D3 : Géométrie et D4 : Organisation et gestion de données.

6. ANALYSE ÉCOLOGIQUE DU CONCEPT MODÉLISATION DANS LE CURRICULUM ET LE MANUEL SCOLAIRE DU 6E PRIMAIRE

Nous commençons par une analyse écologique pour repérer l'habitat relatif à l'activité de modélisation. Pour cela, nous déterminons les paramètres suivants : δ_{titre}=0
n $\delta_{sous\text{-}titre}$ = 5x2=10 ; nombre de Sous-titres comportant les termes modélisation ;
m δ_{texte}= 29 nombre de Textes (sous-chapitres) portant au minimum un terme modélisation ;

p= 27 ; le nombre de Sous-titres du « texte du curriculum du 6e primaire (Men, 2020) ».
La densité du curriculum de mathématiques du 6e primaire (Men, 2020) relativement au concept de modélisation est donnée par la formule ; $D=\frac{10+29}{8(1+27)}=0{,}46$.

Dans les sous titres, la modélisation apparaît deux fois de façon explicite et trois fois sous le nom des situations extra mathématiques. La modélisation apparait 29 fois dans les textes. Cependant, elle n'apparait plus dans les grands titres du curriculum $\delta_{titre}=0$.
La densité D= 0,46 es inférieure à 0,5 ; on peut déduire que la modélisation est un thème second dans le curriculum de mathématiques du 6e primaire.

7. ANALYSE PRAXÉOLOGIQUE DE MODÉLISATION DANS LE MANUEL SCOLAIRE DU 6E PRIMAIRE

7.1. Degré du potentiel algébrique d'une tâche

Le manuel scolaire du 6e primaire est structuré en six types d'activités, à savoir : 1) des activités préparatoires qui consiste à vérifier l'acquisition des connaissances antérieures, 2) des activités d'intégrations des apprentissages, 3) des activités d'exploitation et d'évaluation, 4) des activités de soutien et de renforcement relatives à deux leçons successives, 5) des activités de soutien général et 6) des activités de soutien spécifiques. Ce manuel est structuré selon 48 leçons.
Pour déterminer l'importance accordée à la modélisation dans la résolution de problèmes extra mathématiques apparu dans ce manuel scolaire, nous avons étudié le rapport institutionnel de l'activité de modélisation algébrique à travers l'analyse praxéologique des six rubriques de ce manuel scolaire. C'est-à-dire que nous repérons comment les praxéologies locales que nous avons définies sont prises en charge, quels sont les types de tâches travaillés et avec quel environnement technologico-théorique ?
Quant au degré du potentiel algébrique de la tâche, nous utilisons la définition de Najar et al. (2021) : une tâche potentiellement algébrique peut être résolue par une technique arithmétique ou une technique algébrique. Si l'énoncé de la tâche encourage l'utilisation d'une technique arithmétique, ou si la technique algébrique est hors de portée de l'élève, nous dirons que le degré du potentiel algébrique de la tâche est faible. Dans le cas opposé, si l'énoncé de la tâche encourage l'utilisation d'une technique algébrique, ou si la technique algébrique est accessible à l'élève, nous dirons que le degré du potentiel algébrique de la tâche est fort. Nous avons ainsi une échelle à trois degrés : nul (tâche purement arithmétique), faible et fort, Najar et al. (2021).
La notion de tâche renvoie à une action finalisée, avec un début, un achèvement visé, des conditions d'effectuation, des résultats constatables (réparer une machine, remplir un formulaire, (…), (Coste, 2010). D'après le protocole d'analyse, une tâche mathématique se présente généralement sous forme d'un exercice, d'un problème ou d'une question isolée ou non. Elle peut être composée de sous-tâches, ou faire partie d'un problème comportant plusieurs tâches.
Le corpus des tâches retenues dans ce manuel est composé de 608 tâches. Elles sont réparties selon les trois praxéologies mathématiques régionales de la praxéologie globale de la pensée algébrique qui sont, généraliser, modéliser et calculer. La praxéologie régionale modéliser représente 44,90% (273). Quant au potentiel des activités de modélisation de ce manuel, 57,14% (156) représentent un potentiel nul, 23,68% (144) représentent un potentiel faible et 15,75% (43) représentent un potentiel fort.

7.2. Les exemples suivants illustrent les résultats de cette analyse praxéologique

Exemple 1 **:** Problème 10 - p 23 « Titre de la leçon : Somme et différence des nombres entiers naturels et décimaux » Organisation praxéologique locale- modélisation à travers une expression numérique.

Un agriculteur est allé au marché avec un montant de 2 143,50 dhs dans son portefeuille. Il a vendu 17 moutons à 48 600 dhs et 5 chèvres à 3 775 dhs. Il a acheté deux vaches à 44 125 dhs et des fourrages à 785,75 dhs. Quel est le montant restant chez l'agriculteur ?

Une modélisation par une expression numérique du problème est :
[2143,50 + (48 600 + 3 775)] – (44 125 + 785,75)
Les types de tâches décrites dans la situation et le modèle convoqué :

- Interpréter la situation et identifier les variables pertinentes. Les variables pertinentes sont : les moutons, les chèvres, les vaches et fourrages.
- Identifier et représenter les relations entre ces variables (Construire le modèle)

Le modèle est représenté par une expression numérique sous forme de chaîne de calcul : 2143,50+ 48 600x17 + 3 775x5 - 44 125x2 - 785,75 (Modèles additifs et multiplicatifs)
Par une technique numérique, l'élève peut calculer le montant restant chez l'agriculteur en utilisant une chaîne de calcul numérique (modèle).

- Créer et développer une réponse mathématique en se basant sur le modèle choisi
- L'interprétation du résultat des calculs afin de parvenir à une solution de la situation pratique qui a donné lieu au modèle mathématique.

La technologie : sens des opérations, utilisant des opérations sur les nombres entiers naturels et les décimaux. Le problème est connecté, c'est-à-dire, il existe un moyen d'obtenir la valeur de l'inconnue en opérant uniquement sur des nombres et des relations connus. Une technique arithmétique est facilement accessible et fait obstacle à toute technique algébrique. Cette tâche a un potentiel algébrique nul.

Exemple 2. Problème 2- p.13 Organisation praxéologique locale- modélisation par une relation fonctionnelle ou équation.
Chaque années les parents de Said fêtent son anniversaire, ils préparent un gâteau avec autant de bougies que son âge. Ainsi à sa première année de naissance, ils ont soufflé une bougie, puis deux à sa deuxième année, trois à sa troisième année et ainsi de suite. À la fin de la fête, la maman de Said lui dit :« depuis ta naissance, nous avons utilisé en tout 78 bougies » quel est l'âge de Said ?
Cette tâche consiste à étudier les propriétés arithmétiques, dont la somme des termes consécutifs d'une suite est 78. La technique vise le calcul du rang du dernier terme d'une suite arithmétique dont la somme de ses termes est 78.
Une technique algébrique consiste à trouver la formule de la somme des nombres consécutifs de 1 à n : n(n+1)/2 et à résoudre l'équation du second degré : n(n+1)/2 = 78, ce qui nous amène à une organisation mathématique ponctuelle complexe OMPC(Tra-eq2) (. Cette technique est hors de portée des élèves de 6e année du primaire, ce qui nous amène à accorder un potentiel faible à cette tâche.

Exemple 3 **:** Exercice 11 - p 27 - Organisation praxéologique locale OPL-Modélisation par une équation.
Un ouvrier et sa femme gagnent quotidiennement 189,50 <u>dh</u>. Sachant que le salaire du mari est inférieur à celui de sa femme de 21,75 <u>dh</u>, quel est le salaire mensuel et annuel de chacun d'eux ? (le nombre des jours de l'année est: 365 jours)
- Interpréter la situation et identifier les variables pertinentes
Les variables pertinentes sont : salaire mensuel et annuel de la femme (S_F) et de son mari(S_M),
- Identifier et représenter les relations entre ces variables (Construire le modèle) $S_F + S_M = 189{,}50$ et $S_F = S_M + 21{,}75$(ou bien $S_F - 21{,}75 = S_M$) modèles additifs.

Selon les attentes institutionnelles deux techniques peuvent être envisagées : Par une technique algébrique, l'équation modélisant le problème est la suivante : $S_M+21,75+ S_M==189,50$
Organisation mathématique ponctuelle complexe OMPC(Tr-eq1) qui est décrite par : OMP(Tra-eq1) = (Tra-eq1, τr-aeq1, θr-aeq1, Θalg); Tra-eq1 : Résoudre les équations de la forme ax+b=0
Par une technique numérique, où l'équation et l'inconnue ne sont pas explicites, dans ce cas l'élève ajoute 21,75 à 189,50 et divise par 2 la valeur trouvée dans la somme ce qui donne le salaire de la femme. Si on revanche, il retranche 21,75 de 189,50 et il divise par deux 2 la valeur trouvée, il trouve le salaire du mari.

- Créer et développer une réponse mathématique en se basant sur le modèle choisi.
- L'interprétation du résultat des calculs afin de parvenir à une solution de la situation pratique qui a donné lieu au modèle mathématique.

La tâche encourage l'utilisation d'une technique algébrique et cette technique algébrique est accessible à l'élève, nous dirons que le degré du potentiel algébrique de cette tâche est fort.

7.3. Place de la modélisation dans le curriculum marocain de 6e année du primaire

L'analyse écologique du curriculum de mathématiques du 6e primaire, nous a permis de distinguer un premier aspect du rapport institutionnel à l'objet de savoir « modélisation mathématique ». En effet, ce curriculum ne préserve pas un étendu de l'habitat et une niche diversifiée et pratique au processus « modélisation ».

La modélisation mathématique est essentiellement un pont entre les connaissances mathématiques de base et les situations extra mathématiques, l'apprenant lui-même connaît la relation entre les mathématiques et le monde réel, et que les problèmes auxquels ils sont confrontés peuvent être représentés. Avec les modèles mathématiques et leur application, et en discutant des solutions possibles, de nouvelles prédictions et concepts mathématiques peuvent être produits. La modélisation est formulée dans le curriculum du primaire (MEN, 2020), comme étant l'application des mathématiques pour résoudre des problèmes réels ou des problèmes avec les mathématiques elles-mêmes ou des problèmes dans d'autres disciplines, ou en transformant un problème de la vie courante en un problème mathématique, puis en traitant ce problème et le résoudre, choisissant les meilleures solutions adaptées à la nature du problème abordé, puis généraliser et prévoir des régularités.

Le tableau 2 suivant synthétise les types de tâches de la praxéologie mathématique régionale « Modélisation » et leur potentiel algébrique :

	Genre de tâches : M1					**Genre de tâches : M2**					**Genre de tâches : M3**					
Type de tâches	**M1.1**	**M1.2**	**M1.3**	**M1.4**	**M1.5**	**M2.1**	**M2.2**	**M2.3**	**M2.4**	**M2.5**	**M3.1**	**M3.2**	**M3.3**	**M3.4**	**M3.5**	**Tot.**
Total effectif et %	51,28 % (140)	0,73 % (2)	1,47 % (4)	1,83 % (5)	0,00 % (0)	10,99 % (30)	0,00 % (0)	0,00 % (0)	0,37 % (1)	0,00 % (0)	23,44 % (64)	0,37 % (1)	9,52 % (26)	0,00 % (0)	0,00 % (0)	100,00 % (273)
Potentiel nul	104	2	3	1	0	20	0	0	0	0	19	0	7	0	0	57,14 % (156)
Potentiel faible	29	0	1	2	0	9	0	0	1	0	20	0	12	0	0	27,11 % (74)
Potentiel fort	7	0	0	2	0	1	0	0	0	0	25	1	7	0	0	15,75 % (43)

Tableau 2. *Place de la modélisation dans le manuel scolaire de 6e année du primaire*

Les genres de tâches qui sont mieux représentées dans ce manuel relativement à cette PML modéliser, sont dans un premier lieu, les genres et les types de tâches de la PML M1: modélisation de situations par des expressions numériques. Ce manuel accorde de l'importance à la production des expressions numériques à des fins de calcul et au calcul sur ses expressions numériques. En effet, le genre de tâche M1.1 résoudre une situation se modélisant par une expression numérique est représenté par 51,28 % (140) du total des activités de modélisation. Les activités de ce genre de tâches à potentiel nul représentent 74% (104), celles à potentiel faible représentant 21% (29) et 5% (7) sont des activités à potentiel fort. Dans un deuxième rang, il apparait les genres et types de tâches de la PML M3 : modélisation de situations par des relations fonctionnelles. Elle est représentée par le type de tache M3.1 résoudre un problème associé à une situation se modélisant par une relation fonctionnelle 23,44 % (64). Les activités de ce genre de tâches à potentiel nul représentent 30% (19), celles à potentiel faible représentant 31% (20) et 39% (25) sont des activités à potentiel fort. En dernier rang, il apparait les genres et types de tâches de la PML M2: modélisation de situations par des équations. Les types de tâches M2.1 résoudre une situation se modélisant par une équation faisant intervenir une ou des inconnues représentent un taux de10,99% (30). Les activités de ce genre de tâches à potentiel nul représentent 67% (20), celles à potentiel faible représentant 30% (9) et 3% (1) représente une activité à potentiel fort. Les autres types de tâches considérées dans le MERPA ne sont pas pris en compte dans ce manuel scolaire.

Nous retenons que le lien entre la résolution de problèmes telle qu'elle est conçue dans les attentes du curriculum (MEN, 2020) et le processus de modélisation retenu dans le MERPA ne sont pas généralement conservés. D'une part, il nous semble que la prise en compte de l'organisation didactique développée dans les orientations pédagogiques et dans le manuel scolaire peut avoir des effets sur l'identification de la praxéologie en jeu ou des praxéologies en jeu dans une même activité selon le moment d'institutionnalisation explicite, ou implicite, lorsqu'il s'agit de le laisser à la charge de l'enseignant. D'autre part, nous pouvons procéder à une variation du degré de potentialité algébrique des tâches en fonction de ce moment de l'étude et selon la typologie accordée à ces tâches.

Dans le domaine de la géométrie, nous avons enregistré 7 activités qui serviront de consolidation des acquis. La modélisation ainsi retenue consiste à appliquer des formules dans des situations pour établir des relations fonctionnelles de calcul d'aire, de volume et des périmètres des figures géométriques usuelles. Dans la majorité de ces activités, l'élève résout le problème avec une technique qui ne nécessite que des calculs numériques portant sur la qualité nombrant des nombres. Alors que la question de la représentation des relations entre les quantités numériques données et les inconnues par un modèle symbolique n'est pas vraiment abordée.

Quant au domaine des grandeurs et mesures, nous avons dégagé 76 activités relatives à la praxéologie de modélisation. En effet, les typologies de ces activités varient entre des activités de consolidation des acquis (58) et des activités pour évaluer les acquis (18). Nous n'avons enregistré aucune activité de découverte et de construction de nouvelles connaissances. Dans les deux catégories d'activités, les mêmes techniques se produisent pour les mettre en œuvre. En effet, nous n'avons trouvé aucune précision de différence dans le guide de l'enseignant. À part les calculs sur les applications des formules de calcul d'aire, de volume et de périmètres des figures géométriques usuelles nous pouvons dégager l'utilisation de la proportionnalité comme étant le modèle utilisé par l'apprenant pour résoudre le problème avec une structure multiplicative, nécessitant des conversions en unités de masse, en unités de surface et de volumes. Relativement à cette praxéologie régionale, nous avons retenu 124 activités de modélisation qui sont associés au domaine des nombres et calculs, dont 11 activités relèvent de la découverte, 56 activités de consolidation des acquis, 17 activités d'entrainement et 56 activités d'évaluation des acquis. Le domaine d'organisation et gestion de données est représenté par 65 activités, dont 6 activités relèvent de la découverte, 24 activités de consolidation des acquis, 19 activités d'entrainement et 16 activités d'évaluation des acquis.

Nous retenons de cette analyse qu'il y a peu d'activités de découverte dans les quatre domaines et que la majorité des activités de ces domaines ont un potentiel nul. Ce résultat montre la faible importance de la praxéologie régionale de modélisation dans ce manuel et que cette modélisation est conçue par une prédominance des procédures de calcul numériques au détriment de la reconnaissance des structures algébriques.

8. CONCLUSION

L'analyse réalisée dans cette étude relève une répartition inégale des praxéologies modélisation et calcul au niveau des activités développées dans ce manuel. Les praxéologies les plus dominantes sont celles qui réfèrent à la modélisation et le calcul. La résolution de problèmes contextualisés acquiert une importance remarquable chez les concepteurs des programmes et des manuels pour ce niveau scolaire. La nature des problèmes proposés diffère, dans ce manuel c'est plutôt la modélisation par des expressions numériques qui constitue un enjeu majeur alors que la modélisation par des relations fonctionnelles et par les équations sont peu présentent.

Dans le programme actuel de mathématiques du 6e primaire, nous avons observé que, le nombre d'occurrences du mot « problème » est d'environ une cinquantaine, apparaissant souvent dans l'expression « résolution de problème ». Ce nombre indique l'importance des problèmes dans le discours officiel sur l'enseignement des mathématiques. Dans la section intitulée « Méthodes d'enseignement » du préambule du programme actuel de mathématiques, la résolution de problèmes apparaît comme le but et le moyen de l'activité mathématique.

Dans le manuel du 6^{e} primaire analysé, les problèmes proposés, pour développer l'entrée à l'algèbre, sont classés selon trois organisations praxéologiques ponctuelles, modélisation de situations intra ou extra mathématiques par l'études des structures numériques, par des équations et par des relations fonctionnelles.

La modélisation de situations intra ou extra mathématiques par l'études des structures numériques se manifeste par la réalisation d'un calcul numérique demandant la mise en œuvre d'une règle de calcul (fractions, décimaux…), ou par étudier l'équivalence des expressions numériques et montrer l'égalité de nombres, ou par étudier la structure de certains types de nombres, ainsi que les propriétés arithmétiques (ex : somme de trois entiers consécutifs).

La modélisation de situations intra ou extra mathématiques par des équations se déploie à travers les problèmes de type composition de mesures (réunion, complémentation, produit cartésien,), de transformation, problème complexe avec comparaison et réunion et par des problèmes déconnectés de partages inéquitables qui sont très peu présentent. La modélisation de situations intra ou extra mathématiques par des fonctions fait appel aux problèmes de généralisation (étude des suites numériques ou configurations géométriques) et à l'études des problèmes de calculs.

Nous retenons que selon cette typologie de problèmes, la modélisation telle qu'elle est présentée dans ce manuel scolaire reste ancrée dans l'application des modèles existants. Le potentiel algébrique de ces activités varie entre faible et nul, vue que la plupart des tâches n'encouragent pas une technique algébrique accessible à l'élève. Cependant, dans ce manuel, nous avons repéré peu de tâches de modélisation à potentiel fort. Même si certaines tâches renvoient à une résolution de problèmes contextualisés se ramenant le plus souvent à des expressions numériques, celles-ci peuvent être réinvesties de manière à rompre avec une perspective d'arithmétique généralisée.

Les résultats obtenus dans cette étude permettent de mieux appréhender les facteurs qui interviennent dans la conception du curriculum et du manuel scolaire dans le domaine de l'algèbre, et d'interpréter les choix institutionnels au regard des enjeux épistémiques relatifs au passage d'un mode de pensée arithmétique à un mode de pensée algébrique, pour favoriser l'entrée au développement de la pensée algébrique à travers la voie de modélisation.

BIBLIOGRAPHIE

BEDNARZ, N., KIERAN, C. et LEE, L. (Eds.). (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching.* Boston: Kluwer Academic Publishers.

BOSCH, M. et CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 19(1), 77–124.

BRONNER, A. et LARGUIER, M. (2018). Éléments d'analyse du curriculum officiel à propos de la pensée algébrique. In Aboud, M.(Ed.) *Mathématiques en scène : des ponts entre les disciplines Actes EMF2018 – GT2*, pp. 236-245.

BUI THI KHANG, H. (2005). *Une étude didactique de la vie de l'énergie dans l'enseignement de la physique*, en France et au Vietnam. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

CARRAHER, D. W. et SCHLIEMANN, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669–705). Greenwich, CT: Information Age Publishing

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* 19 43–72.

CHEVALLARD, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège-troisième partie. *Petit x ,* 23, 5-38.

CHEVALLARD, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(3), 17-54.

COSTE, D. (2010). Tâche, progression, curriculum. Canadian Modern Language Review/ *La Revue Canadienne Des Langues Vivantes,* 66(4), 499–510. https://doi.org/10.3138/cmlr.66.4.499.

FILLOY, E. et ROJANO, T. (1989). *Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. For the Learning of Mathematic*s, 9, 19-25.

KAPUT, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by «algebrafying» the K-12 curriculum. Proceedings of a National Symposium, may 27 and 28, 1997. *The Nature and Role of Algebra in the* K-14 Curriculum (p. 25-26).

KIERAN, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In A. D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 390-419). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics Lins, 1992.

KIERAN, C. (1994) A functional approach to the introduction of algebra: some pros and cons, in Ponte J. P., Matos J. F. (Eds.). Proceedings of the 18th International *Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 1, 157-175.

LINS, R. C., & KAPUT, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), The future of the teaching and learning of algebra. *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (Vol. 1, pp. 47–70). The University of Melbourne, Australia.

NAJAR, R., SQUALLI, H., ADIHOU, A. et ABOUHANIFA, S. (2021). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : Pour un état des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre, *ITM Web of Conferences* 39, 01004 CIFEM'2020

POLLAK, H.O. (1997). Mathematical modeling and discrete mathematics. In Joseph G. Rosenstein, Deborah S. Franzblau & Fred S. Roberts (Eds.) Discrete Mathematics in Schools. DIMACS Series in discrete mathematics and theoretical computer science. Volume 36 (pp.99-104). Reston, VA: *National Council of Teachers of Mathematics*

RADFORD, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. Mathematics Education Research Journal, 26(2) (pp. 257-277).

RADFORD, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (dir.), Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: *The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 3-25). New York: Springer.

SQUALLI, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base*. Thèse de doctorat. Université Laval.

SQUALLI, H. ; NAJAR, R. ; ABOUHANIFA, S. et ADIHOU, A. (2020). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie. État des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre. Communication présentée dans *la 3ème édition du Colloque International sur la Formation et l'Enseignement des Mathématiques et des Sciences* CIFEM'2020 25 & 26 Mars 2020, CRMEF Casablanca-Settat, Section provinciale d'El Jadida, Maroc.

SQUALLI, H., MARY, C. et MARCHAND, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre: cas du Québec et de l'Ontario. In J. Lebeaume, A. Hasni et I. Harlé (dir.), *Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique*, Vol. 1, pp. 65-78. De Boeck Supérieur.

SQUALLI, H., JEANNOTTE, D., KOUDOGBO, J. et ROBERT, V. (2019). Analyse du potentiel du développement de la pensée algébrique dans le programme de formation de l'école québécoise. Communication présentée dans Working group 3: *Teaching for connections and understanding. CIEAEM*-71, Braga, 22 - 26 juillet 2019

VERGNAUD, G. (1986), Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre in *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique*, Éditions La Pensée Sauvage.

Documents officiels

Aljaid Fi Arriyadiat, (2020*), manuel scolaire de mathématiques du 6e primaire,* Edition Librairie nationale.

Guide de l'enseignant, (2020), *Guide du manuel scolaire de Aljaid Fi Arriyadiat, mathématiques du 6e primaire*, Edition Librairie nationale

Ministère de l'Éducation Nationale (MEN) du Maroc. (2009), Orientations pédagogiques du secondaire collégial

Ministère de l'Éducation Nationale (MEN) du Maroc. (2020), Curriculum de l'enseignement primaire.

La modélisation mathématique d'un phénomène physique : une approche expérimentale possible pour l'enseignement de l'intégrale

Inen Akrouti
Université de Jendouba (ISSHJ) / Université de Carthage (LaRINa)

RÉSUMÉ

L'intégrale est un objet extrêmement important qui sert de base à de nombreuses applications dans de nombreux domaines inter et intra mathématiques. Elle est également un objet complexe qui se caractérise par une structure qui lui donne une nature multiforme. Dans l'histoire de l'intégrale et son enseignement, ce concept pourrait avoir plusieurs interprétations faisant appel par exemple à la notion de primitive ou à la notion d'aire. Cette pluralité nécessite une attention particulière afin de faire comprendre aux étudiants les idées principales qui le fondent. Une utilisation excessive de certaines interprétations de l'intégrale pourrait limiter son application et son domaine d'efficacité. Afin de développer une compréhension adéquate de l'intégrale, nous sommes parties d'une situation physique simple qui propose un phénomène réel. Cette situation permet d'expérimenter les mathématiques, fait sortir les étudiants de leur confort et permet d'aborder l'intégrale par des approximations. A travers cette situation, nous souhaitons notamment étudier le raisonnement développé par les étudiants au cours des échanges faits en classe.

Mots-clefs : Intégrale, structure multiplicative, phénomène physique et approche expérimentale

1. INTRODUCTION

Historiquement, l'intégrale se rattache au développement du calcul infinitésimal qui a ouvert de nouvelles pistes de réflexion dans beaucoup de domaines de la science, en particulier en mathématiques. Il a guidé des changements fondamentaux en abordant de nouvelles questions qui n'ont pas été posées avant. Carnot considère l'intégrale comme une somme alors que De Freycinet la définit comme un calcul de limite, et les termes qui constituent la structure de l'intégrale sont toujours supposés de la forme : $f(x)\Delta x$. Cette caractérisation en structure de relation multiplicative, entre la fonction à intégrer $f\ (x)$ et une petite quantité Δx, a été considérée par des chercheurs en didactique des mathématiques (Kouropatov et Dreyfus, 2013 ; Akrouti, 2021) et également en didactique de la physique (Meredith et Marrongelle, 2008) comme indispensable à la réussite des étudiants pour comprendre conceptuellement la notion d'intégrale. Par ailleurs, elle évoque un raisonnement quantitatif nécessaire au développement des connaissances proceptuelles (Gray et Tall, 1994. Le calcul intégral a été aussi développé comme une étude de la variation d'un mouvement dans un contexte physique. Le développement d'une approche didactique cohérente ne devrait pas se limiter seulement à cette phénoménologie historique. Elle devrait être considérée dans un cadre qui pourrait rendre les conceptions qui ont, historiquement, donné lieu au concept mathématique correspondant, des conceptions familiales pour un sujet apprenant.

Des études antérieures (Kouropatov & Dreyfus, 2013 ; Greefrath & al., 2020) soulignent que les élèves à la fin du secondaire ou les étudiants à l'entrée à l'université ne gardent de la notion d'intégrale que des connaissances ambiguës et insuffisantes pour avoir un apprentissage conceptuel. Legrand souligne que les apprenants acceptent ce qui est enseigné en classe et croient à la vérité des assertions par effet du contrat, et non par une conviction de nature scientifique qui s'appuie sur des arguments rationnels : « La naturalisation par le professeur de la rationalité scientifique prive l'élève de la possibilité de jouer avec les bonnes règles du jeu puisqu'il a spontanément tendance à mobiliser une rationalité du quotidien inadapté au jeu scientifique » (Legrand, 1990, cité par Lecorre, 2016, p. 174). Par ailleurs, l'enseignement de l'intégrale repose sur un formalisme « accru » ce qui rend compliqué l'utilisation des définitions et des propriétés dans les preuves demandées (Akrouti, 2021). Nous pouvons changer les stratégies d'enseignement. Nous pourrons nous appuyer sur une approche expérimentale qui se base sur l'expérience personnelle des étudiants et leurs images intuitives pour développer la signification mathématique dont nous avons besoin. Notre problématique se focalise sur la définition formelle de l'intégrale et comment la mettre en application dans l'activité mathématique des étudiants. Nous envisageons notamment d'analyser la pertinence de la situation que nous avons proposée afin de permettre aux étudiants à l'entrée à l'université d'aborder la notion d'intégrale avec des connaissances porteuses du sens.

2. Objectif et pertinence de l'étude

Afin de mettre en place notre pot de vue, nous avons pensé à proposer une situation qui se base sur la structure de produit $f(x) \times \Delta x$ comme idée motrice de ce travail. En fait, cette structure, s'appuie sur la procédure linéaire « simple produit » et la considère comme le fil conducteur de toute construction possible. Notre point de vue se base sur la structure multiplicative et sur la possibilité de rendre le concept d'intégrale expérimentalement accessible. C'est-à-dire concevoir des situations qui permettent des allers retours entre le concret et l'abstrait, entre l'intuition et la formalisation. Il est à noter que le concret n'est pas toujours des objets matériels, il pourrait bien être des objets suffisamment familiers pour les apprenants (Dias, 2008). À notre avis, le domaine de Calculus (calcul différentiel et intégral) n'est pas exclusivement un domaine mathématique, il est également un phénomène culturel qui représente le point de vue des individus sur la réalité. D'une façon générale, il est difficile d'imaginer un domaine scientifique moderne qui n'utilise pas le calcul différentiel et intégral (Kouropatov, 2015). Ce travail de recherche pose donc un regard sur la définition formelle de l'intégrale en première année supérieure. L'idée de la structure multiplicative n'est pas nouvelle en soi. C'est son adaptation qui va nous servir de base au développement et à l'expérimentation de la situation que nous envisageons pour l'enseignement du concept d'intégrale.

Dans l'approche que nous proposons, l'introduction du concept d'intégrale repose sur l'acceptation de la priorité de la compréhension conceptuelle d'un élément de connaissance par rapport à l'acquisition des compétences formelles algorithmiques ou procédurales liées à son application. Nous pensons que cette proposition est réalisable car il semble qu'il n'y ait pas une raison logique qui interdit la formation du concept avant d'étudier la procédure formelle. En plus, de nombreuses recherches portant sur l'étude de l'intégrale au lycée ou à l'université démontrent que l'approche didactique la plus courante (basée d'abord sur l'étude des compétences procédurales) ne conduit pas, pour la plupart des élèves ou étudiants, à développer une compréhension solide du concept d'intégrale (Kouropatov & Dreyfus, 2013 ; Thompson, 2019, Akrouti, 2021). Par ailleurs, si nous considérons que l'objectif d'un tel apprentissage est le développement de connaissances d'ordre conceptuel, nous devons être convaincus que l'approche didactique actuelle n'atteint pas cet objectif.

3. Cadrage théorique

Pour aborder notre problématique, nous avons choisi de nous placer dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) comme cadre conceptuel de référence. La TSD propose un modèle d'apprentissage à partir des situations adidactiques ou à potentialité adidactique. Ce modèle se base sur la structuration en niveaux du milieu (Bloch, 2000). Nous soulignons que la situation adidactique est une situation idéale de référence. Ce que le sujet apprenant fait, dans cette situation, a un caractère de nécessité par rapport au savoir et non pour des raisons didactiques (Sophie Soury-Lavergne, 2011). Dans cette situation, les rapports classiques qui organisent l'opération d'enseignement/apprentissage disparaissent. Cela veut dire qu'il s'agit d'une situation qui fonctionne sans l'intervention de l'enseignant ou avec une intervention faible de sa part. Le sujet apprenant est l'acteur principal de son savoir. Ainsi, le savoir qui est le centre d'intérêt de « la situation adidactique devient le problème de l'étudiant par un processus dit de dévolution » Lalaude-Labayle (2016, p. 112). La situation adidactique organise l'activité du sujet apprenant en trois phases :

- La phase d'action (milieu heuristique) : en préparant une situation adidactique ou à potentialité adidactique, l'enseignant organise un milieu qui permet au sujet apprenant la conduite de la situation. C'est-à-dire que le sujet développe une activité en fonction de son répertoire de connaissances ou simplement : il agit sur les objets auxquels il est confronté. Il se rapproche de ce que Freinet[1] appelle « un tâtonnement expérimental ». La phase d'action évolue vers un changement de point de vue du côté du sujet apprenant.
- La phase de formulation : le sujet apprenant produit deux types d'actions : « action sur les objets et action sur les conditions d'action » (Gibel, 2008). C'est-à-dire que le sujet agit sur les conditions afin de les modifier pour créer des nouvelles conditions d'utilisation des objets. Ces nouvelles conditions apparaissent pour qu'elles soient partagées. En fait, afin d'argumenter les choix d'action, le sujet apprenant doit formuler des connaissances en cours d'acquisition pour interpréter les réponses du milieu (Dias, 2008). Le sujet apprenant évolue ainsi vers un changement de code et de langage : le partage des idées et de l'expérience.
- La phase de validation : Cette phase est consacrée à la discussion (par rapport à la vérité des assertions et des théorèmes qui en découlent). Les conjectures étayées sont justifiées par des arguments et des preuves. Les différents participants (sujet apprenant et enseignant) sont responsables de la validation. Ce qui compte ici est l'adéquation entre les connaissances construites et le savoir visé du point de vue de la vérité scientifique. Il s'agit d'une évolution vers un changement de théorie et permet d'obtenir des théorèmes.

Selon Brousseau (1997), le savoir est contextualisé, dépersonnalisé pour ensuite être recontextualisé en classe. En fait, les questions posées par l'enseignant ne doivent pas contenir la réponse et en même temps, le sujet apprenant ne doit pas être seul sans l'aide de l'enseignant. C'est entre ces deux conditions que se situent la dévolution. Par ailleurs, cette dévolution s'effectue le plus souvent en organisant une modification très profonde du contrat didactique usuel par l'organisation de plages adidactiques. Ainsi, l'organisation de cette dévolution est en quelque sorte spécifique de chaque savoir et repose essentiellement sur une structuration très fine du milieu didactique. En effet, il s'agit d'une organisation de la situation problématique qui permet de prévoir ce que les sujets apprenants peuvent concevoir et proposer à partir des raisonnements naturels que la situation leur inspire. Ainsi, on imagine les décisions qu'ils vont pouvoir prendre seuls, sans être plus ou moins discrètement invités, poussés, contraints par l'enseignant à aller dans le sens du savoir institutionnel visé par l'étude. La TSD offre aux mathématiques un aspect expérimental qui est presque absent de l'enseignement usuel. Les allers retours entre objets matériels et objets théoriques aident le sujet apprenant à être autonome dans la construction du savoir et lui permet une entrée adéquate dans la théorie mathématique visée.

[1] Cité dans Dias, 2008, p. 46.

4. MÉTHODOLOGIE

4.1 Adaptation d'un outil d'analyse des données

Les chercheurs n'ont pas cessé d'enrichir le modèle de structuration en niveau de milieu par d'autres outils théoriques adaptés notamment à des questions relatives au cursus supérieur (Bloch, 2000). A travers ces recherches, il y a eu des aménagements et une revue de la manière d'exploiter ces interactions. Bloch et Gibel (2011) ont incorporé de nouveaux éléments de la sémiotique de Peirce pour étudier le raisonnement développé par les sujets apprenants au cours des différentes phases du milieu. Gibel (2008) précise que c'est au niveau de l'articulation entre le milieu heuristique (milieu objectif) et le milieu de référence « qu'il apparait et se développe le raisonnement attendu ». Il considère que les interventions de l'enseignant, dans une situation d'apprentissage, sont dans le but de garder la part de l'adidacticité de la situation. Ces interventions enrichissent le milieu soit pour relancer l'activité dans la situation d'action, soit pour reformuler une expression proposée par un étudiant afin de lui donner un nouvel aspect.

Les éléments utilisés de la sémiotique de Peirce sont les icônes, les indices et les symboles-arguments. Une icône interprète une action de l'étudiant confronté à la situation. Lecorre (2016) précise qu'en mathématique les icônes sont des signes qui évoquent immédiatement pour le mathématicien une théorie sans avoir besoin de la revisiter : par exemple le symbole ∫ « intégrale » renvoie à la théorie de mesure. Les indices sont les signes qui indiquent un objet. Les icônes et les indices sont des signes non symboliques. Ils représentent l'étape intuitive dans le développement d'un raisonnement mathématique. Les indices et les icônes doivent cependant être médités entre eux pour produire des significations générales, ce qui fait de l'assertion ou la proposition le noyau de la connaissance explicite. Otte (2006) précise que toute proposition contient au moins une icône et un indice et qu'un signe n'est pas seulement un fait fini dans l'espace-temps, c'est aussi un processus. Les symboles-arguments sont les signes qui désignent l'objet au travers des règles et lois auxquels se soumet l'objet.

Les trois axes du modèle initial (Bloch et Gibel, 2011) constituent le socle du modèle proposé par Lalaude-Labayle pour l'analyse des raisonnements au niveau du supérieur. Lalaude-Labayle a ajouté une quatrième ligne en se basant également sur la sémiotique de Peirce, et suppose que tout raisonnement prend nécessairement l'une des formes suivantes : abductive, inductive ou déductive. Ces trois formes de raisonnement sont en fait trois types d'argumentation.

Lecorre (2016) suppose que la compréhension de la réalité nécessite la mobilisation de la rationalité. Il définit la rationalité comme étant un système de contrôle et de production de connaissances non contradictoires. Cependant, un sujet pourrait rencontrer « un conflit de rationalité », c'est-à-dire que le sujet se rend compte de l'existence d'une contradiction. Ces conflits qui déstabilisent le sujet apprenant permettent des transitions de rationalités. Lecorre précise que cette façon de penser la rationalité suppose trois principes : la réalité, la non-contradiction et le raisonnement. Par ailleurs, il considère que la question de la réalité est fondamentale. Elle sert de point de départ à tout questionnement scientifique. Il distingue la réalité matérielle de la réalité intellectuelle et précise que la première représente les objets matériels alors que la deuxième représente les objets conceptuels. Lecorre définit trois types de rationalité : rationalité pragmatique, rationalité empirique et rationalité théorique. Il précise que les moyens de validation sont : l'abduction, l'induction et la déduction qui correspondent respectivement à trois types de validation : la vérification, l'argumentation et la démonstration. Le tableau ci-dessous présente le modèle qu'on a adopté pour analyser les interactions des étudiants.

	Milieu M-2	**Milieu M-1**	**Milieu M0**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM **-Choix du contexte (physique, mathématique).** - Décision de transformation de l'énoncé (registre sémiotique), **de conversion entre registres** **- Décision de choisir une conception particulière (primitive, mesure d'une grandeur pour le contexte mathématique et la mise en équation pour le contexte physique).** - Décision de calcul. - Moyen heuristique. - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple.	R1.2 SYN/SEM[2] - Calculs génériques. - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet mathématique.	R1.3 SYN En lien avec l'enseignant : - organiser les signes pour obtenir un objet calculable. - formulation et certification de validations, de preuves - formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise.
Niveaux d'utilisation des signes	R2.1 SEM Icones ou indices dépendant du contexte (schémas, intuition), **modèle ponctue l$\boldsymbol{f(x)} \times \boldsymbol{x}$**.	R2.2 SYNT/SEM Arguments locaux, génériques, opératoires : indices, calculs, **modèle local $\boldsymbol{f(x_i)} \times \Delta \boldsymbol{x}$**.	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques du domaine mathématique de la situation, **modèle global $\boldsymbol{f(x_i)} \times \boldsymbol{dx}$**.
Usage et actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, connaissances ponctuelles (**modèle de base, raisonnement ponctuel**).	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : des énoncés ; du système organisateur (**modèle local, Raisonnement covariationnel simple).**	R3.3 SYNT - Formulation des preuves. - Introduction d'ostensifs organisés. - Intégrations des éléments théoriques du domaine maths (**Raisonnement covariationnel complexe.**
Forme de raisonnement	R4.1 Abductif, inductif, déductif	R4.2 Inductif, déductif,	R4.3 Déductif
Types de rationalité	**R5.1** **Pragmatique, empirique, théorique**	**R5.2** **Empirique, théorique**	**R5.3** **Théorique**

Tableau. *Adaptation d'un outil méthodologique pour l'étude des interactions en classe*

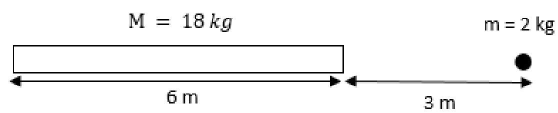
4.2 La situation proposée

La situation que nous avons proposée s'appelle « La Situation du Barreau ». Elle a été proposée en février 2020 à un groupe d'étudiants (18 étudiants) inscrits en première année préparatoire de filière Maths-physique (MP) à l'IPEIT. Cette situation a été proposée pour la première fois, comme une situation fondamentale pour l'introduction de l'intégrale, par Legrand et son équipe de recherche en 1985 à des étudiants en Deug à l'Université de Lyon avant qu'ils n'abordent le cours d'intégration. La situation a été organisée en une seule séance de durée deux heures et demie, et a été enregistrée sur dictaphone puis retranscrite. Il est important de noter que l'enseignante n'a donné aucune indication sur les objectifs de la situation et n'a écrit au tableau que les données du problème. Notons également que des modifications mineures ont été effectuées sur les interventions des étudiants et parfois sur celles de l'enseignante pour en faciliter la lecture. Par exemple, les mots en arabe ont été traduits en français et la construction de quelques phrases a été revue. Cependant, nous avons renoncé à ce type de rectification chaque fois qu'on a senti qu'il peut toucher au contenu de l'intervention.

Succinctement, à travers cette situation, nous souhaitons amener les étudiants à voir concrètement les éléments fondamentaux qui constituent la structure de l'intégrale : « il ne s'agit ni de développer la théorie pour elle-même ni de la réduire à un simple calcul de primitive » (Legrand, 1990, p. 205). D'ailleurs, lorsque les étudiants se rendent compte qu'ils ne peuvent pas calculer directement par simple produit un résultat global parce qu'il dépend d'un phénomène variable dans le temps ou dans l'espace, ils vont chercher une autre solution. Cette solution dépend de deux grandeurs : un

[2] Nous entendons par SEM sémantique et par SYN syntaxique.

phénomène variable qui est à l'origine du résultat cherché et la mesure d'un domaine sur lequel le phénomène exerce son action pour produire le résultat cherché. L'action du phénomène variable est généralement représentée par une fonction numérique (la hauteur pour l'aire, la surface pour le volume, la vitesse pour la distance, etc…).
La situation proposée est la suivante : Connaissant la loi d'attraction de deux masses ponctuelles m et M : $F = G\,\frac{Mm}{r^2}$. Déterminer la force F d'attraction entre la masse ponctuelle m de 2kg et le barreau de 6m de longueur et de masse M = 18kg dans la position suivante :



4.3 Analyse a priori de la situation

En se basant sur la règle du centre de gravité, les étudiants sont appelés à calculer la force en question. Dans cette première phase, il s'agit d'appliquer la procédure « simple produit » en concentrant toute la masse du barreau en son centre de gravité. La deuxième phase de l'expérimentation consiste à faire la somme des forces partielles sur chaque partie découpée du barreau. Bien que les étudiants ne l'aient probablement jamais exprimé explicitement, ils devaient nécessairement connaitre que le système modélisé (constitué de la longueur du barreau et la distance qui le sépare de la masse ponctuelle) est une réunion de ses parties (les petits morceaux obtenus après le découpage). Cela pourrait être implicitement reconnu par leur confort avec l'idée de décomposer le domaine en différentes partitions puis d'obtenir les sommes à partir des forces partielles. Pour la formule de la distance, il aurait dû être évident pour les étudiants que la distance totale était égale à la somme des parties de toutes les plus petites distances. Cependant, il ne serait peut-être pas aussi facile pour eux de comprendre que la force exercée par le barreau sur la masse ponctuelle pouvait être décomposée en forces partielles en raison de leur méconnaissance du phénomène physique qu'ils sont en train d'étudier. Symboliquement, cette étape est représentée par la somme deRiemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. Enfin, il s'agit d'établir la limite pour fournir la définition formelle de l'intégrale : $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. Du point de vue cognitif, le raisonnement dans cette étape se caractérise par la visualisation de la somme de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ pour toute valeur de n et la réflexion sur la limite de la somme de Riemann lorsque n tend vers l'infini. Des distinctions sont faites au sein de cette étape entre l'obtention de meilleures approximations de la valeur limite et l'obtention de la valeur exacte de la limite. L'augmentation du nombre de découpages est un exemple de réflexion sur la limite en termes de meilleures approximations, même si l'on ne calcule pas la valeur exacte de la limite. La traduction de tout ce débat en un langage formel, par l'enseignant, sollicite un passage du mode sémantique au mode syntaxique.

5. Principaux résultats de l'analyse a posteriori

Nous soulignons, tout d'abord, que les processus de construction des étudiants n'étaient pas linéaires et qu'ils se sont déroulés dans un contexte personnel et social spécifique pour chaque étudiant. Il y avait des différences entre les étudiants concernant le contexte mathématique, le style de travail, le besoin de soutien, le type de collaboration, etc. D'autre part, nous avons observé une similitude considérable entre les processus de construction des étudiants, et cela semble être dû à la conception des activités et à leur faible degré de dépendance aux constructions précédentes, c'est-à-dire au contexte mathématique des étudiants.

5.1 Du point de vue de la pratique du raisonnement et la mobilisation de la rationalité

L'étude a posteriori de la situation nous a permis de mettre en évidence les différentes formes du raisonnement produit par les étudiants ainsi que les types de rationalité qu'ils mobilisent. Elle montre que les raisonnements recouvrent des fonctions spécifiques en étroite relation avec les niveaux de milieu. En fait, au niveau M-2 du milieu, un nombre important des étudiants arrive à prendre la décision de transformer les énoncés du registre des figures au registre arithmétique dans la première phase, du registre de figure au registre numérique dans la deuxième phase, et du registre numérique au registre algébrique. Dans ce milieu, le raisonnement se base sur des cas concrets : les étudiants supposent qu'ils sont en train de calculer la valeur d'une force d'attraction entre deux masses ponctuelles comme l'intervention suivante : « *on peut utiliser le centre de gravité car dans des problèmes similaires on a utilisé ce principe* ». Ainsi, ils s'appuient sur le modèle ponctuel « simple produit ». Il s'agit alors dans la majorité des cas d'un raisonnement abductif qui mobilise une rationalité pragmatique. Ensuite, au niveau M-1 du milieu, un nombre aussi conséquent d'étudiants arrive à faire des calculs génériques, à prendre des décisions sur l'utilité de la règle du centre de gravité dans la première phase : « *puisque la tige est uniforme et fine, on concentre la masse en son centre de gravité pour calculer la distance entre la tige et la masse ponctuelle* », et à reformuler des conjectures relatives à l'assouplissement de la procédure linéaire « simple produit » pour qu'elle soit appliquée aux découpages choisis : « *pourquoi on ne découpe pas le barreau en quatre et on regarde le résultat ?* ». Ils sollicitent par la suite le modèle local ce qui amène à élaborer des procédures permettant de se rapprocher de la valeur exacte de la fonction. Il s'agit de la production d'une généralité à partir d'un signe particulier qui prend la forme d'un raisonnement inductif et qui mobilise une rationalité empirique. Enfin, au niveau M0 du milieu, la classe arrive à institutionnaliser la première étape dans la procédure intégrale $f(r_i) \times \Delta r$ qui s'appuie sur le modèle ponctuel. Cela étant, elle arrive à institutionnaliser la deuxième étape, celle de la somme qui s'appuie sur le modèle local. Enfin, les étudiants arrivent à montrer que les deux mesures inférieures et supérieures convergent vers la même limite. Ils arrivent à produire un signe particulier : $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ et mettent en application une procédure globale. Il s'agit alors d'un raisonnement déductif qui mobilise une rationalité théorique.

5.2 Du point de vue de l'usage et de l'actualisation du répertoire didactique

Le modèle d'analyse que nous avons utilisé nous a permis de regarder les connaissances et les savoirs mobilisés par les étudiants en lien avec leur répertoire didactique. Les connaissances utilisées sont en étroite relation avec la mise en œuvre de la procédure intégrale (découpage, sommation, encadrement et passage à la limite). Nous avons remarqué que les étudiants ont exclu le principe du centre de gravité et ont procédé à une autre méthode qu'ils sont capables d'utiliser et de montrer sa validité et sa pertinence. Ceci a amené à enrichir le répertoire didactique de la classe. En effet, les étudiants ont montré qu'ils peuvent avoir une certaine autonomie dans la construction de leur répertoire de connaissances. Les débats établis en classe ont poussé les étudiants à construire leur propre conviction sur le problème. La confrontation aux différents milieux de la situation du barreau les a amenés à la formulation de conjectures étayées en lien avec l'usage de la propriété d'additivité des forces d'attraction partielles. Le contrôle de la validité de cette conjecture a été souvent en mode sémantique : « *la masse est distribuée uniformément donc chaque petit barreau possède une masse M divisée par le nombre total des barreaux* » mais, parfois en mode syntaxique : « *si on découpe infiniment, la masse est* $\frac{M}{n}$ ». Ensuite, les étudiants ont découvert collectivement que chaque force locale est majorée (respectivement minorée) sur chaque partie du domaine qui lui correspond. C'est-à-dire qu'ils ont enrichi le système organisateur par l'application du modèle ponctuel localement. C'est une étape très délicate dans l'élaboration de la solution du problème car il n'est pas facile d'appliquer la procédure « simple produit » directement. Ceci pourrait être résumé par le fait que la valeur de F est fournie par « le simple produit de l'intensité locale du phénomène par la mesure de la partie infinitésimale concernée » (Legrand, 1990, p. 217). Enfin, en passant à la limite, les étudiants s'aperçoivent que les encadrements inférieurs et supérieurs convergent vers la même limite et que la valeur obtenue est indépendante du choix du nombre de découpage. En fait, les étudiants se rendent compte que l'objet mathématique caché derrière cette structure n'est que l'intégrale de l'intensité du phénomène physique en jeu. Le contrôle de la validité des conjectures étayées dans les différentes phases est d'ordre sémantique dans leur globalité. Le contrôle syntaxique se développe au fur et à mesure qu'on se rapproche de la phase d'institutionnalisation. Ceci est très naturel car l'institutionnalisation nécessite la formalisation des preuves dans la théorie d'intégration par l'introduction des ostensifs organisés tels que $\int$, $\sum$, et l'intégration des éléments théoriques du domaine mathématique tel que $\lim_{n\to\infty}\sum$.

5.3 Du point de vue de la conviction des étudiants en situation de validation

L'analyse du déroulement de la séance de classe nous a permis de mettre en œuvre les formes des raisonnements produits par les étudiants et les types de rationalités qu'ils mobilisent dans les différentes phases et les niveaux de milieux correspondants. Nous pouvons dire qu'il a été difficile pour certains étudiants d'accéder à la troisième phase de la situation, bien que cette phase soit le niveau d'expertise estimé : ils restent souvent bloqués au niveau de la première phase avec des connaissances anciennes non adaptées. En fait, les étudiants échouent parfois à passer du raisonnement d'ordre sémantique au raisonnement d'ordre syntaxique que nécessite la preuve formelle. Ils réalisent les calculs génériques et la formulation des conjectures demandées, et semblent se perdre lorsqu'il s'agit de les transformer en un langage formel structuré. Ils ne peuvent pas contrôler le sens des opérations qu'ils sont en train de faire. Il est à noter que parfois, ils reviennent à un milieu plus bas où la décision sur les objets relatifs à ce milieu est supposée prise. Ainsi, la plupart d'entre eux n'atteignent pas le niveau R3.3. Ça n'empêche pas que nous avons identifié des interventions relatives au deuxième niveau (R2.3) qui montrent un ensemble riche de techniques, de procédures et une variété d'occasions d'appliquer des formules qui amènent à la formalisation de preuve et à l'entrée dans la théorie d'intégration. Pourtant, la familiarité avec ces nouvelles connaissances n'est pas facile à établir. Il nous semble que les difficultés mises en évidence dans cette étude sont liées au choix didactique que nous avons fait (la nature de la situation basée sur un contexte physique). En effet, le choix didactique qu'on aurait dû effectuer pour pallier ces difficultés est de proposer à la classe d'adopter régulièrement un comportement épistémologique et social particulier : celui de la communauté des savants, ces chercheurs de qui lorsqu'ils sont placés devant une situation problématique cherchent à déterminer ce qui leur apparaît a priori pertinent et valide dans une rationalité pragmatique et qui s'obligent ensuite à présenter à la communauté les idées personnelles qu'ils ont d'abord élaborées seuls ou avec quelques pairs, en adoptant une forme d'expression telle que le groupe complet de leurs pairs puisse s'en saisir comme d'une idée générale qui pourrait après étude collective s'insérer dans la théorie de la classe.

5.4 Du point de vue des interventions de l'enseignante

Éventuellement assisté par un pair et/ou par l'enseignant, chaque étudiant doit tenter de formuler ses idées propres en termes de conjectures : il appartient alors à l'enseignant de voir comment ordonner le traitement collectif de ces propositions initialement individuelles pour que le débat sur chaque idée puisse apporter un éclairage dans la compréhension de la situation. Pour cela, il propose à la classe de s'arrêter dans la recherche d'autres idées pour se concentrer sur une idée précise. Il invite la classe à résoudre telle ou telle conjecture, par exemple, il invite chacun à exercer un travail de preuve et de réfutation scientifique sur une idée initialement portée par un étudiant seul. De cette façon, cette idée devient, pendant le temps de la résolution de la conjecture énoncée, la propriété intellectuelle de tous. Par ce choix d'introduction des idées personnelles, les idées fortes qui émergent ici et là ne passent plus à la trappe. Elles suscitent un fort débat, alors que les idées informulables dans une certaine rationalité indiquent d'elles-mêmes à leurs auteurs qu'ils doivent trouver une autre façon de les exprimer.

Les débats qui ont été organisés par l'enseignante qui respecte l'expression des idées qui se sont formées dans une rationalité pragmatique ont trouvé des difficultés de passer rationnellement et collectivement du pragmatique vers le théorique. Ce choix, d'organisation de la classe, n'a pas permis à l'enseignante, non seulement de mieux structurer les débats et de marquer des étapes dans l'évolution des interventions erratiques, mais aussi de ne pas enseigner en acte une prise de conscience des savoirs « métamathématiques » qu'on vient de côtoyer. C'est-à-dire, regarder après coup ce qui a été décisif à certains moments cruciaux dans l'action scientifique menée ensemble, en particulier en quoi l'apparition de telle ou telle contradiction, de tel échec qu'on a pris en compte, a obligé le groupe à prendre une distance salutaire et faire un saut cognitif pour nous faire sortir d'une appréhension trop frustre de la situation. Dans la réalité d'une classe, ceux qui voient, entendent et remarquent ce qui a une réelle consistance épistémologique dans ces diverses propositions d'apparence semblable ne constituent pas l'ensemble des étudiants. Mais, seulement quelques sujets épistémiques en avance, ou décalés par rapport au groupe et qui ne sont d'ailleurs pas forcément très conscients du degré de profondeur en termes de pertinence et de contradiction potentielle que contient leur idée propre ou celle de leur pair ; en fait, seul l'enseignant possède les connaissances épistémologiques qui permettent d'avoir rapidement cette perception.

Le problème déontologique pratique c'est que l'enseignante sent plus ou moins que pour pouvoir exercer sa fonction d'enseigner, il faudrait que quelqu'un mette en exergue ces propositions prometteuses de compréhension profonde. Or, l'enseignante est la seule à pouvoir le faire mais elle a été prisonnière de la position adidactique qu'elle a choisi d'occuper et qui lui interdit d'intervenir sur le fond dans le débat. C'est à ce niveau, ainsi que le dit Legrand (1990), que l'instauration d'une communauté scientifique classe va pouvoir jouer un rôle didactique décisif dans la pratique de ces débats spontanés. Dans un tel apprentissage des théories et des techniques, les techniques peuvent alors devenir en conscience l'opérationnalisation d'un traitement rationnel de la réalité.

6. CONCLUSION

Ici, dans la situation du barreau, un détour s'impose peu à peu de façon adidactique : comme sur chacune des parties on peut facilement majorer et minorer ce qui peut advenir sur la partie entière, il se peut qu'en diminuant ces parties, non seulement les encadrements locaux mais aussi leur somme se resserrent au point de faire apparaître une valeur limite de ces sommes (et non la somme des limites) qui devient par construction l'évaluation exacte de la grandeur recherchée. La théorie de l'intégrale, dont l'enseignante a conduit l'organisation, a pu in fine opérationnaliser tout ce travail d'approche très concrète mais aussi très laborieuse d'une réalité insaisissable. En reliant dans la suite du cours ce processus d'approximation et de passage à la limite au calcul d'une primitive, on accède à ce processus hautement signifiant auquel toutes les sciences ont recours pour évaluer leurs grandeurs insaisissables, le détour intégral devient rationnellement opérationnel.

Pour affiner les approximations, les étudiants aurait dû augmenter le nombre d'erreurs commises à chaque étape et dans les cas favorables (fonctions intégrables) on est paradoxalement parvenu à faire diminuer leur somme jusqu'à la faire disparaître à la limite ; ensuite, quand la théorie sera achevée, un unique calcul de primitive nous fournira une estimation qui ne comporte plus aucune erreur. Ce fait remarquable qui donne toute son importance au Théorème Fondamental de l'Analyse et explique une partie de la synergie naturelle math-sciences appliquées n'est actuellement perçu dans sa signification propre que par une infime minorité des étudiants scientifiques, quel que soit leur niveau d'études, et ce bien qu'ils aient été par ailleurs largement entraînés à pratiquer une heuristique des primitives qui ne servira probablement qu'à une infime minorité d'entre eux par la suite : le résultat final demeure un calcul approché dont ils ignorent bien sûr la précision.

BIBLIOGRAPHIE

AKROUTI, I. (2021). *L'enseignement de l'intégrale en Tunisie. Quelle approche ? Quelle alternative ?* Thèse de l'Université Virtuelle de Tunis (ISEFC).

BLOCH, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université*. Thèse Université Bordeaux I

BLOCH, I. et GIBEL, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : Étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(2), (pp. 191-228).

BROUSSEAU, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics, *Kluwer Academic Publishers*.

DIAS, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. Thèse de doctorat de l'Université Lyon 1 – Claude Bernard, France.

GIBEL, P. (2008), Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 13, (pp. 5-39).

GRAY, E. M. et TALL, D. O. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25(2), (pp. 116-140).

GREEFRATH, G et al. (2020). Basic mental models of integrals: theoretical conception, development of a test instrument, and first results. *ZDM*, 1-13.

MEREDITH, D. C. et MARRONGELLE, K. A. (2008). How Students use Mathematical Resources in an Electrostatics Context. *American Journal of Physics*, 76(6), (pp. 570-578).

KOUROPATOV, A. (2015). *The Integral Concept in High School: Constructing Knowledge about Accumulation*. Thèse de doctorat, Université de Tel Aviv, Israel.

KOUROPATOV, A. et DREYFUS, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: Suggestion for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44, (pp. 641–651).

LALAUDE-LABAYLE, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre au niveau universitaire. Etude épistémologique et didactique*. Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

LECORRE, T. (2016). Rationality and concept of limit. *First conference of the Network for Didactic Research in University Mathematics*, Montpellier, France, (pp. 83 – 92).

LEGRAND, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(9), (pp. 365-406).

OTTE, M. (2006). Proof and explanation from a semiotical point of view. *Revista Latino-Americana de Matematica Educativa* Numero especial 23–43.

THOMPSON, P. W. (2019). *Making a Fundamental Theorem of Calculus Fundamental to Students' Calculus*. The Conference on Calculus in Upper Secondary and Beginning University Mathematics, Matric and University of Agder, Kristiansand, Norway, 6-9 August 2019, 15-42.

Géométrie dynamique, un instrument pour la construction des sens sur le concept de droite tangente vue sous le prisme de la limite : une étude de cas auprès des lycéens de classe de première scientifique au Cameroun

Nana Giscard Nguembou
Université de Yaoundé 1- Cameroun

RESUME

Grâce à l'environnement de géométrie dynamique, notamment grâce à la coordination des fonctionnalités déplacement, zoom et réduction, nous rendons opérationnel une technique de construction de la droite tangente, centrée sur l'articulation d'une vision dynamique et d'une vision statique de la limite. L'article montre comment la mise en œuvre de ladite technique par un lycéen peut lui permettre de construire des connaissances prédicatives sur la notion de position limite. Et comment, le transfert de cette technique au-delà du cadre géométrique, pour le cadre analytique, peut permettre au lycéen de construire des connaissances opératoires et prédicatives sur la notion de droite tangente, susceptibles de l'aider à produire une équation algébrique de la droite tangente en adoptant une vision dynamique de la limite. Cette étude montre également que la mise en œuvre de la technique sus-évoquée, peut aider à provoquer chez l'apprenant, le développement des perspectives locales fortement décriées par la recherche (Dufour, 2019; Delgadillo et al., 2016) comme absentes chez ce dernier.

Mots-clés. Tangente, Limite, perspective locale, géométrie dynamique, champ conceptuel.

1. INTRODUCTION

Certains chercheurs à l'instar de (Panero, 2018; Delgadillo et al., 2016; Dufour, 2019) relèvent chez les lycéens, l'absence de vision locale sur le concept de droite tangente. Pourtant nécessaire pour sa compréhension lorsque l'on se réfère à la théorie des perspectives sur les fonctions (Vandebrouck, 2011). En classe de première, les concepts de tangente et de limite sont enseignés par exemple en, physique, chimie, économie et en géographie. Dans le cours de physique, la vitesse instantanée vue comme une limite est souvent un objet d'étude. Ainsi, la construction de nouvelles connaissances sur ces concepts dans le cadre de la discipline mathématique pourrait provoquer un transfert de compétences vers les autres disciplines.

Au moment où les technologies numériques sont introduites progressivement dans toutes les disciplines au Cameroun, il nous semble opportun de mettre à profit le caractère dynamique de certains outils technologiques pour enseigner les aspects dynamiques des concepts sus-évoqués. En effet, le déplacement d'un point sur la courbe pour le faire confondre avec le futur point de tangence, est une expérience dont le but poursuivi, nous semble atteignable, davantage dans les environnements dynamiques. Notamment dans les environnements de géométrie dynamique (Restrepo, 2008; Laborde & Capponi, 1994).

Par ailleurs, d'autres recherches dont celle de (Alory et al., 2015) soulèvent la difficulté à trouver des exercices susceptibles de provoquer le développement des perspectives locales sur la droite tangente. Dès lors, nous postulons que les tâches mathématiques fondées sur le point de vue proposé par la dérivation permettent difficilement de construire des tâches avec pour vocation aider le lycéen à développer lesdites perspectives. La limite étant une notion locale, rendre opérationnel le point de vue de la droite tangente qui la présente comme une limite, serait sans doute, un début de solution aux problèmes sus évoqués.

Nous articulons cette communication en cinq moments. Nous revenons sur la qualité du travail mathématique actuellement proposé au lycéen en lien avec le concept de droite tangente. En second lieu, nous expliquons pourquoi ce concept, vue sous l'angle de limite peut enrichir le travail mathématique du lycéen. Ces explications sont assorties des difficultés à surmonter pour rendre ce point de vue opérationnel. La proposition d'une technique de construction de la droite tangente dans l'environnement GéoGebra, constitue le troisième temps fort. Elle contribue à expliquer le choix de notre théorie explicative et le choix de notre méthode. La partie expérimentale nous donne l'occasion de présenter d'autres formes de tâches centrées sur le concept de droite tangente. Aussi de mettre en évidence, comment lesdites tâches peuvent aider à enrichir le travail mathématique et à provoquer le développement des perspectives locales chez un lycéen. Nous terminons ce travail avec la question de l'interdisciplinarité. Je nomme dans ce travail, relation de « ***sécance*** », une relation liant une courbe et une droite par des points d'intersections simples uniquement.

2. PROBLEMATISATION DE L'OBJET DE RECHERCHE

2.1 Un travail mathématique pauvre sur la notion de tangente : le point de vue proposé par la dérivation

Au Cameroun, la notion de droite tangente est travaillée en classe de première principalement avec le point de vue que propose la dérivation. Cependant, ce point de vue ne donne pas beaucoup de possibilités pour enrichir l'activité mathématique de l'apprenant. En effet, sur deux décennies, précisément entre 2000 et 2020 la notion de droite tangente apparait exactement deux fois aux examens nationaux du probatoire série « D ». Sur les deux années, les questions sont semblables aussi bien sur le fond que sur la forme. Elles invitent le candidat d'une part, à déterminer une équation algébrique de la droite tangente en un point de la courbe, connaissant son abscisse et l'expression algébrique de la fonction dérivée, et d'autre part, à tracer son représentant dans le registre graphique. Ce type de tâche réduit le travail mathématique du candidat à la notion de dérivation. Cette question, déjà soulevée par certains chercheurs (Delgadillo et al., 2016) reste encore d'actualité.

2.2 La droite tangente sous l'angle de la limite : un enrichissement du travail mathématique.

La droite tangente travaillée sous l'angle de la limite repose sur une constellation de concepts. Nous pouvons citer entre autres les notions de, point d'intersection simple, point d'intersection multiple, droite sécante, droite tangente, suite de droites sécantes, limite dynamique, limite statique, covariation, et de convergence. La mise en articulation et en fonctionnement des concepts suscités nous semble être une possibilité pour enrichir le travail mathématique du lycéen en termes de concepts à mobiliser lors de la résolution des tâches relatives à la notion de droite tangente. Mais aussi, donnerait des occasions au sujet de développer les perspectives locales sur les relations de tangences.

2.3 Les difficultés soulevées par la recherche pour rentrer ce point de vue opérationnel dans le registre graphique

Plusieurs chercheurs (Panero, 2018; Balhan et al., 2015; Gantois, 2012; Vivier, 2010) entre autres, soulèvent les difficultés pour l'apprentissage de la notion de droite tangente sous l'angle de la limite. Ils sont s'accordent sur la difficulté pour les lycéens d'appréhender le passage de la droite sécante à sa position limite, dans l'environnement papier crayon. Une des explications proposées est décrite par Schneider (1988), lorsqu'elle dit « cette définition est, elle aussi, purement géométrique, en ce sens qu'elle ne suppose aucun détour par les pentes, mais, contrairement à la perception des élèves, elle évoque plus une possibilité *de dépassement* qu'une réalisation effective. » (p.327). Gantois argumente en disant que : « Finalement, ce qui pose problème chez les élèves est que la limite est pensée dans un univers inadéquat. » (p.137). Vivier fait un constat en lien avec les difficultés sus évoquées, lorsqu'il dit : « cette approche C3 par limite de droites, qui fait, l'unanimité dans les manuels, n'est pas explicitement au programme, n'est pas opérationnelle, ne permet pas de résoudre des problèmes […] » (Vivier, 2010, p.176). A la lumière des travaux évoqués nous soutenons que l'environnement papier-crayon ne serait pas propice pour penser la notion de limite dynamique. Cependant, comme nous verrons dans la section suivante, les milieux dynamiques offrent des possibilités.

3. UNE TECHNIQUE DE CONSTRUCTION DE LA DROITE TANGENTE VUS SOUS LE PRISME DE LA LIMITE

La technique consiste à construire en premier lieu une droite sécante passant par le point de tangence. De façon à former avec la courbe des points d'intersections simples, parmi lesquels un point mobile B sur la courbe à déplacer vers le futur point de tangence A. Le reste des points sont des points non attrapables dont les déplacements dépendent de celui du point B.

3.1 Coordination des fonctionnalités déplacement et zoom : une vision dynamique limite

Suite à cette étape, la construction se poursuit par le rapprochement du point mobile B vers le futur point de tangence jusqu'à saturation. Elle est atteinte lorsqu'une portion de la droite sécante et une portion de la courbe se confondent à l'écran et apparaissent comme un segment de droite, avec les points A et B bien distincts dans la fenêtre géométrie. Une démarche non experte mobiliserait la fonctionnalité déplacement toute seule. Elle conduirait au dépassement du point A par le point B ou à la superposition à l'écran de leurs représentants. Ce dernier cas fait disparaitre la droite tangente de l'écran. Pour surmonter cette difficulté liée à l'environnement GéoGébra, la coordination des fonctionnalités zoom et déplacement est une possibilité. L'on rapproche le point B à proximité du point A à l'aide de la fonctionnalité déplacement. Ensuite on agrandit à l'écran le représentant de la distance entre les points A et B grâce à la fonctionnalité zoom. Puis on utilise à nouveau la fonctionnalité déplacement pour un autre rapprochement tel que décrit ci-dessus. On peut réitérer la même opération autant que nécessaire. On peut construire ainsi une suite de points $(B_n)_n$ de la courbe, deux à deux distincts et qui converge vers le point A. Chaque rapprochement du point B vers le point A, rapproche la droite sécante de la droite tangente. Ainsi, on obtient un moyen de rapprocher sans cesse, la droite sécante de la droite tangente. Par la même occasion, on peut construire une suite de droites $(AB_n)_n$ sécantes à la courbe, deux à deux distinctes et qui convergent vers la droite tangente. En adaptant la définition de la limite proposée par D'Alembert, nous utiliserons la « définition » suivante : **Si l'on peut trouver une technique permettant de rapprocher sans cesse et autant que l'on veut, un objet géométrique d'un autre de même nature, sans que le premier ne puisse coïncider, ni surpasser le deuxième, alors le deuxième est limite du premier**.

3.2 Le passage de la droite sécante à sa position limite : une vision statique de la limite

Au point de saturation, les points A et B sont bien distincts à l'écran. Une possibilité de faire coïncider leurs représentants, consiste à utiliser la fonctionnalité zoom inverse. Dans la pratique on effectue des zooms inverses consécutifs entre les représentants des points A et B jusqu'à ce qu'ils se superposent à l'écran. En ce moment la droite sécante est passée à sa position limite qui correspond à la droite tangente. La courbe et sa tangente forment alors à la position du point A, une intersection dont l'ordre de multiplicité est supérieur ou égal à deux (vision statique de la limite). La poursuite de zooms inverses renforce l'image de superposition des représentants des points. Ce qui pourrait faire émerger l'idée de « position limite ».

3.3 Technologie sur la technique

La fonctionnalité déplacement se comporte comme une rotation centrée en A, lors de chaque rapprochement du point A vers le point B. Pendant que le zoom se comporte comme une homothétie de rapport strictement supérieur à 1, lorsqu'il grossit à l'écran l'écart angulaire entre les droites ou lorsqu'il agrandit la distance entre les points A et B. Par suite, le passage de la droite sécante à sa position limite serait le fruit de la composée de rotation centrée en A et d'homothéties. Par ailleurs, les zooms font varier l'échelle de l'unité de longueurs sur les axes. Ceci se manifeste soit par l'agrandissement soit par la réduction à l'écran des objets géométriques en jeu. On peut donc repérer l'échelle de départ avant les transformations, et par suite, retrouver cette échelle lors du processus de réduction.

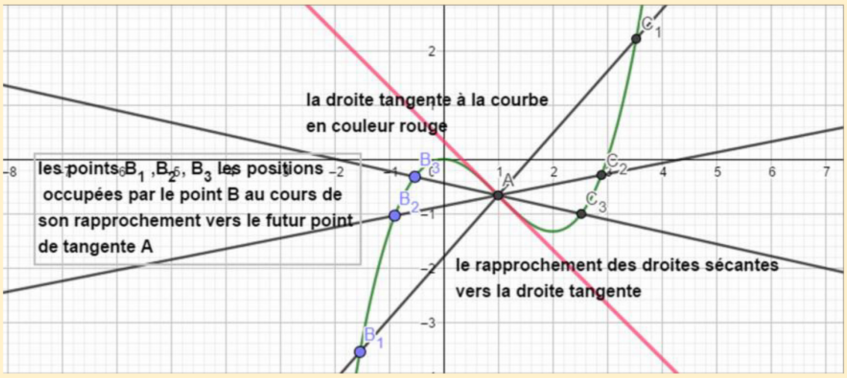


Figure 1. Les points d'intersections simples liant la courbe aux droites sécantes

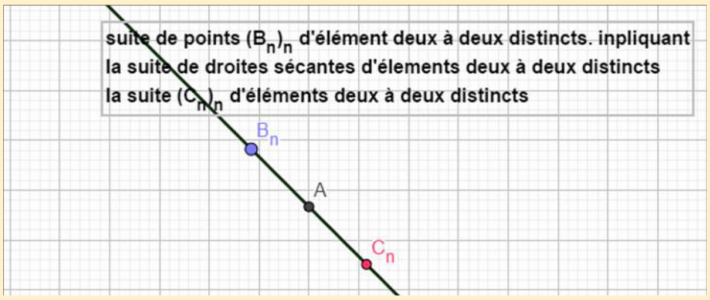


Figure 2.: la coordination des fonctionnalités zoom et déplacement permet de construire la suite de points $(B_n)_n$ qui converge vers le futur point de tangence A. par la même occasion, elle permet de construire une suite de droites sécantes $(AB_n)_n$ qui converge vers la droite tangente.

L'ordre de multiplicité du point de tangence est égale à 03

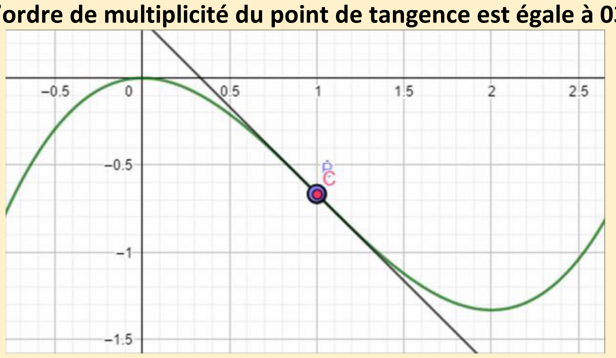


Figure 3. à partir du point de saturation, Les zooms inverses permettent de faire passer la droite sécante (AB_n) à sa position limite, qui correspond à la droite tangente.

4 CADRE THEORIQUE

Au regard, des difficultés pour le lycéen à construire des sens sur le concept de position limite lorsqu'il concerne la droite tangente, nous avons choisi d'inviter le participant à construire lui-même des connaissances prédicatives sur ce concept, à partir, des connaissances acquises sous la forme opératoire, dans l'environnement de géométrie, lors des constructions graphiques de la droite tangente, à l'aide de la technique sus-décrite. Au cours des différentes activités dans ce milieu, les participants pourraient construire des sens géométriques et dynamiques sur le concept de droite tangente et sur ses concepts secondaires. Notamment sur le concept de position limite. Nous cherchons aussi à faire en sorte que le sujet construise des sens analytiques sur le concept de position limite. Grâce au transfert des connaissances construites dans le cadre géométrique. La réussite de la conversion des unités signifiantes (Duval, 1994), pourrait être un indicateur de ce que l'environnement de géométrie dynamique aurait été un milieu propice pour penser les concepts en jeu.

Ainsi, le concept de schème de Piaget tel que revisité par (Vergnaud, 2001) semble alors être un bon outil pour analyser et comprendre comment le sujet construit dans l'action ses nouvelles connaissances. Car, selon ces chercheurs, la construction des nouveaux schèmes prend toujours appui sur des schèmes antérieurs. Cette théorie de l'adaptation va nous permettre de vérifier ou de confirmer si les schèmes de constructions de la droite tangente, développés dans l'environnement de géométrie dynamique seraient efficaces pour le développement de nouveaux schèmes, permettant de produire une équation algébrique de la droite tangente.

5 METHODE

5.1 Technique de collecte de donnée

Notre technique de collecte de données est le *teaching Expériment* (TE). Il est centré sur des séances d'enseignement orchestrées par l'enseignant-chercheur. Selon l'objectif visé, celui-ci occasionne des interactions entre les sujets ou entre les sujets et lui-même, en vue d'évaluer, d'orienter et de réguler les connaissances construites par les sujets. Dans le but de s'assurer que le sujet surmonte la difficulté annoncée par la recherche et surtout, comprendre et expliquer comment celui-ci y parvient. Les autres acteurs du (TE) **:** le chercheur-témoin et deux lycéens volontaires. Le chercheur-témoin participe à l'élaboration des tâches à proposer aux sujets, donne son avis sur l'interprétation des données, dans le but de renforcer l'objectivité du chercheur-enseignant. Les participants ont été choisis de manière raisonnée en collaboration avec l'enseignant de la classe qui est par ailleurs le chercheur-témoin. Le (TE) est propre à la didactique des mathématiques. Il a principalement été développée à l'école Russe et plus récemment aux États-Unis par (Steffe et al., 2000; Steffe & Thompson, 2000), entre autres.

5.2 Méthode d'analyse de donnée.

La séance que nous avons choisie de présenter et d'analyser s'inscrit dans une séquence d'enseignement visant à faire évoluer les conceptions actuelles des lycéens sur la notion de droite tangente. Notre méthode d'analyse des données est qualitative. Elle suit la démarche : choix du moment de la séance à analyser ; justification dudit choix, description dudit moment, interprétations des données sous l'angle des théories explicatives et enfin, appuyer ces interprétations par des extraits de transcription ou des figures provenant des cahiers des participants. Ces étapes sont inspirées par le modèle de (Powell et al., 2003) et récemment utilisées par (Dufour, 2019).

6 L'ENVIRONNEMENT DE GEOMETRIE DYNAMIQUE EST PROPICE POUR PENSER LE CONCEPT DE DROITE TANGENTE SOUS LE PRISME DE LA LIMITE

Nous choisissons d'analyser ce moment au regard de la difficulté des lycéens à appréhender le passage de la droite sécante à sa position limite. Difficulté fortement soulignée par la littérature. Ce moment est centré sur la production d'une équation algébrique de la droite tangente, vue sous l'angle de la limite. Nous avons placé les participants dans l'environnement GéoGébra. Ceux-ci ont construit avec succès la droite tangente à la courbe de la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$ au point A= $\binom{3}{0}$, à partir de la technique sus-décrite. Dans le milieu papier nous avons formulé une tâche avec le même objectif : en désignant par p la nième position du point B au cours du rapprochement inépuisable de celui-ci vers le point A, écrire en fonction de p, les coordonnées d'un point B_p sur (c), telle que le paramètre p puisse permettre de rapprocher ledit point vers le futur point de tangence A, autant que l'on veut.

Nous allons centrer notre analyse sur le travail du participant X, car il ressort le mieux, sa vision dynamique de la notion de limite. Les principales étapes dudit travail sont résumées ci-dessous.

<u>Production du participant X</u>

(1)A= $\binom{3}{0}$ **B** = $\begin{pmatrix} 3+\frac{1}{p} \\ \frac{3}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{1}{3p^3} \end{pmatrix}$ **(2)** AB_p: $y_p = (3+\frac{2}{p}+\frac{1}{3p^2})(x-3)$

(3)$q_p(x) = (f(x) - y_p) = \frac{1}{3}(x-3)(x-3-\frac{1}{p})$... **(4)** $q(x) = f(x) - y = \frac{1}{3}(x-3)^2(x+3)$ est obtenue lorsque l'on fait tendre p vers l'infini dans (3). (5) (T) : $y = 3x - 9$ est la droite tangente à (c) en A, car elle forme avec la courbe, à la position du point A, une intersection dont l'ordre de multiplicité est égal à 2 (**vision statique de la limite**)

Figure 4. *Stratégie du participant X.*

6.1 L'environnement de géométrie dynamique est propice pour le développement d'une vision statique de la limite

Les enregistrements vidéo obtenus révèlent que le participant X a repris 4 fois la construction de la droite tangente toujours à l'aide de la même technique. Nous déduisons que pour développer des nouveaux schèmes de production d'une équation algébrique, le sujet a sollicité comme schèmes prérequis, les schèmes de constructions graphiques, développés dans l'environnement de géométrie dynamique. En effet, il se donne un représentant de la droite sécante dans le registre analytique (voir étape 2). Il agit sur le paramètre p pour faire coïncider les points A et B (voire étape 4). Puis, conclut alors que la droite sécante est devenue la droite tangente (voire l'étape 5).

Au vu de cette démarche, nous disons que les composantes prise d'information, invariants opératoires et inférences du schème ont permis au sujet de repérer ces étapes comme incontournables pour transformer la relation de « *sécance »* en relation tangence. Le fait pour le participant de penser la relation de tangence en termes d'intersections multiples, nous laisse croire que la technique de géométrique sus-évoquée lui a aussi permis de développer une vision statique de la limite relativement au cadre géométrique (voire ligne (II)). Car cette vision intègre l'idée que la limite est atteinte. Le développement d'une technique lui ayant permis de faire coïncider les points dans le cadre analytique, nous invite à soutenir que la technique géométrique sus-décrite est transférable dans le cadre analytique, et que ce transfert peut permettre au lycéen de produire une algébrique de la droite en adoptant une vision statique de la limite relativement au cadre analytique.

Par ailleurs, sa stratégie de résolution ne nous donne pas d'informations sur son aptitude à modéliser ou pas, le rapprochement inépuisable du point B vers le futur point de tangence A. L'Enseignant-Chercheur (EC) revient sur ce point lors de la mise en commun.

Extrait1 : d'une mise en commun et d'une institutionnalisation locale

I. EC : pouvez-vous rappeler ce que nous avons appelé l'ordre de multiplicité du point de tangence dans le milieu informatique ?
II. Le participant Y : le nombre de points d'intersections simples qui partent se superposer avec le futur point de tangence. Et transforme la relation de *sécance* en relation de tangence.
III. EC : à quoi correspond-t-il dans le cadre analytique ?
IV. Le participant X : ça correspond au nombre de fois que $(x - x(A))$ apparait dans la forme factorisée de l'expression $f(x) - y$.
V. EC : très bien ! Avez-vous essayé de justifier que la droite tangente est limite d'une suite de droites sécantes à déterminer ?
VI. Participant Y : oui mais je n'ai pas pu aller jusqu'au bout.
VII. Participant X : puisque la $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{p} + \frac{2}{3p^2}) = 0$, on peut donc rapprocher sans cesse et autant que l'on veut, les termes de la suites $(\frac{1}{p} + \frac{2}{3p^2})$ du réel 0, sans jamais l'atteindre, ni le surpasser, en donnant à p des valeurs de plus en plus grandes. Par suite, on peut rapprocher sans cesse et autant que l'on veut, la droite sécante $(AB_p): y_p = (3 + \frac{2}{p} + \frac{1}{3p^2})(x - 3)$ de la droite fixe (D): $y = 3(x - 3)$, sans jamais l'atteindre, ni la surpasser, en donnant à p des valeurs de plus en plus grandes. Par conséquence, cette droite fixe (D) est la droite tangente (T).
VIII. EC ; très bien !

6.2 L'environnement de géométrie dynamique est propice pour le développement d'une vision dynamique de la limite

Le participant X a développé une technique algébrique lui ayant permis de montrer que l'on peut rapprocher de façon inépuisable la droite sécante de la droite tangente (voir la ligne VII). La bonne exploitation de cette technique pour résoudre la tâche proposée, témoigne que le participant a construit des nouveaux sens algébriques sur le concept de limite dynamique. Ces connaissances construites sur le concept de limite dynamique seraient le fruit d'une adaptation des connaissances antérieures d'après la théorie des champs conceptuels. Ce qui nous laisse penser que le sujet a construit des sens géométriques et dynamique sur le concept de limite dynamique dans l'environnement GéoGébra. Comme le témoigne son intervention : « on peut donc rapprocher sans cesse et autant que l'on veut, la droite sécante AB_p : $y_p = (3 + \frac{2}{p} + \frac{1}{3p^2})(x - 3)$ de la droite d'équation $y = 3(x - 3)$, sans jamais l'atteindre, ni la surpasser ». Ce qui nous invite à soutenir que, la technique mise en œuvre dans l'environnement Géogébra, a un potentiel élevé d'activer une vision dynamique de la limite.

6.3 Le concept d'ordre de multiplicité du point de tangence : un outil efficace pour provoquer le développement des perspectives locales

Le participant X a construit des sens géométriques et dynamique sur le concept d'ordre de multiplicité dans l'environnement de géométrie dynamique (voir la ligne II). Celui-ci pense la notion de tangente en termes de points d'intersections simples qui partent se superposer sur le futur point de tangence. Ce travail centré autour des voisinages décroissants du point de tangence, aurait permis au sujet de développer dans l'environnement GeoGebra, des perspectives locales sur la notion de droite tangente. Car, en se superposant sur le futur point de tangence, ces points transforment la relation de « sécance »[1] en relation de tangence. Ainsi,

[1] Comme déjà précisé à l'introduction, Je nomme ici par relation de « sécance », une relation liant une courbe et une droite par des points d'intersections simples uniquement.

dans l'environnement dynamique, le participant reconnait d'abord la relation de tangence (à partir des points qui se superposent), pour ensuite accepter que les objets géométriques en présence, sont des objets tangents.
Aussi, le participant a construit un sens analytique sur le concept d'ordre de multiplicité (voir la ligne IV). Ce qui lui permet de reconnaitre dans le cadre analytique une relation tangence. Ce schème de reconnaissance de la relation de tangence dans le registre anlytique, a sans doute pour schème prérequis, le schème de reconnaissance de la relation de tangence développée dans l'environnement de géométrie dynamique.
Le participant a développé une technique analytique lui permettant de transformer, la relation de « *sécance* » $(q_p(x) = (f(x) - y_p) = \frac{1}{3}(x-3)(x-3-\frac{1}{p})(x+3+\frac{1}{p}))$ en relation de tangence $(q(x) = f(x) - y = \frac{1}{3}(x-3)^2(x+3))$. En utilisant le passage à la limite, Il a trouvé dans le cadre analytique un moyen de faire tendre le point d'intersection simple d'abscisse $x = 3 - \frac{1}{p}$ vers le futur point de tangence d'abscisse $x = 3$. Puisque la situation est inédite, la technique mise œuvre par le participant, qui consiste à faire tendre certains points d'intersections simples vers le futur point de tangence pour obtenir une droite tangente, montre que celui a développé en situation, une vision locale sur la notion de droite tangente.

7 Discussion et interet pour la recherche

7.1 Sur le plan de la transposition didactique

Dans cet article nous proposons des exercices rentrant dans les programmes et dont les résolutions nécessitent impérativement d'adopter des perspectives locales sur les relations de tangentes, comme observés chez le participant X lors de la résolution des tâches proposées dans le cadre de l'analyse. Les chercheurs dont (Alory et al., 2015) ont soulevé la difficulté de trouver de tels exercices. Par ailleurs, dans lesdits exercices la droite tangente, vue sous le prisme de la limite, n'a pas une valeur ostensive comme dans nombre de manuels. Elle est un objet premier par rapport à sa pente. Ainsi, l'apprenant peut travailler sur cet objet géométrique en restant dans le cadre géométrique ou avec des schèmes de pensée développés entièrement dans le cadre géométrique. Les auteurs dont (Balhan et al., 2015) ont relevé les difficultés pour les lycéens à considérer la droite tangente comme un objet second par rapport à sa pente.

7.2 Sur le plan épistémologique

Nous proposons une technique opérationnelle dans l'environnement de géométrie dynamique et qui aurait un potentiel local élevé. En effet, le participant X a bien adapté les schèmes développés dans l'environnement GéoGebra, pour produire équation algébrique de la droite tangente, en adoptant une vision locale et dynamique. Certaines recherchent (Delgadillo et al., 2016) soulignent que le concept de droite tangente est trop riche pour le penser uniquement avec le point vue proposé par la dérivation. D'où l'intérêt du développement des nouveaux schèmes de pensée du concept de droite tangente.
La même technique a permis au sujet de développer des nouveaux schèmes de pensée du concept de limite. Lesdits schèmes lui ont permis de discriminer la tâche à résoudre en adoptant une vision dynamique de la limite, de celle à résoudre en adoptant une vision statique. Elle serait donc un bon moyen pour surmonter la difficulté des lycéens à comprendre la dualité de la limite. Cette difficulté est mentionné par (Dufour, 2019) entre autres.

Lien avec l'interdisciplinarité

Dans l'enseignement de la physique en classe de première, la notion de vitesse instantanée, vue sous le prisme de la limite est travaillée, comme le montre cet extrait du manul « les majors » à la page 124 :

> Une mangue située en un point O, situé à 12 m du sol se détache du manguier. La distance parcourue par la mangue à la date t est $d(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t$, l'unité de temp est la seconde, l'unité de longueur est le mètre. On conçoit que la manque en mouvement possède, à chaque instant une vitesse dite instantanée. Le problème est de définir et de calculer cette vitesse. A la date $t = 1$, par exemple, nous la noterons $v(1)$
> 1.b) En continuant le calcul des vitesses moyennes pour des valeurs de h de plus en plus proche de 0, on peut obtenir des approximations meilleures de $v(1)$. Mais aucune des valeurs n'est la valeur exacte de la vitesse instantanée à la date 1, car elle doit évidemment être exprimée par un seul nombre. **La façon d'y parvenir est de dire que $v(1)$ est la limite de la fonction $h \mapsto \frac{d(1+h)-d(1)}{h}$ en 0.** Calculer $v(1)$.

Figure 5. *Extrait du manul « les majors » p. 124.*

Le texte 1.b) montre que l'absence d'une « définition » de la limite ne facilite pas la construction d'une définition intelligible de la vitesse instantanée, à partir des vitesses moyennes. Car, ici on part d'une approche intuitive de la limite pour construire un nouveau concept. Il nous semble alors que la compréhension de la définition de la limite proposée par d'Alembert, sur laquelle nous avons donné des occasions au participant de construire des sens dans l'environnement GéoGebra peut, être d'un apport important pour faire travailler les apprenants sur la notion de vitesse instantanée, dans le cours de physique, en classe de première. Nous avons alors proposé cette tâche au participant X. En reformulant la question de la manière suivante : détermine en fonction de t, la valeur limite $v(t)$, des valeurs prises par les vitesses moyennes entre les dates t et t'$= t + h$, où h prend des valeurs proches de zéro. Le participant X à procéder comme suit :

$\frac{d(t+h)-d(t)}{h} = t + 2 + \frac{1}{2}h$. *Puisque* $\lim_{h\to 0} \frac{d(t+h)-d(t)}{h} = t + 2$, *on peut donc rapprocher sans cesse et autant que l'on veut la valeur* $t + 2 + \frac{1}{2}h$, *de la valeur* $t + 2$, *sans jamais l'atteindre, ni la surpasser, en donnant à* h *des valeurs de plus en plus proches de 0. Par conséquence, la valeur* $t + 2$ *est la limite des valeurs prises par les vitesses moyennes entre les dates* t et $t' = t + h$. *Ce qui permet de conclure que la vitesse instantanée* $v(t) = t + 2 = \lim_{h\to 0} \frac{d(t+h)-d(t)}{h}$.

Partant d'une vision dynamique de la limite le participant X, est arrivé à établir la relation qui existe entre la vitesse instantanée et les vitesses moyennes du mobile. Ceci nous invite à soutenir que, les connaissances opératoires sur la notion de limite dynamique, acquises dans l'environnement GéoGebra, sont efficaces pour la construction de sens sur la notion de vitesse instantanée, telle appréhendée en classe de première dans le cours de physique.

8 CONCLUSION

Cette étude visait, entre autres, la proposition des nouvelles formes de tâches, dont les résolutions sont susceptibles de provoquer la construction de nouveaux sens sur le concept de droite tangente, ainsi que sur les concepts sur lesquels il repose. Orienté par le caractère local du concept de limite, nous avons rendu opérationnel, dans l'environnement GéoGebra, le point de vue qui présente la droite tangente sous le prisme de la limite. Au vu des difficultés soulevées par la recherche pour rendre ce point de vue accessible aux apprenants dans l'environnement papier-crayon, nous avons choisi de commencer par faire acquérir les connaissances sur ce concept sous la forme opératoire, dans un environnement de géométrie dynamique. Grâce à une technique centrée sur la coordination des fonctionnalités zoom, déplacement et réduction. Elle a permis aux sujets de développer des schèmes de construction de droites tangente en adoptant une vision dynamique et statique de la limite. Ces schèmes, ont permis au participant de développer de nouveaux schèmes, lui ayant permis de produire une équation algébrique de la droite tangente en adoptant une vision dynamique et statique de la limite. Pour produire cette équation le participant X a mis en articulation et fonctionnement les notions de, limite, voisinage, convergence et de position limite. Ce qui nous invite à soutenir que, le sujet a développé dans l'environnement de géométrie dynamique des perspectives locale, globale et ponctuelle sur la notion de droite tangente. Aussi, en termes de concepts mobilisés pour travailler ladite notion, l'activité mathématique des participants ont été plus riches que celles proposées actuellement aux lycéens. Par ailleurs, cette vision dynamique de la limite a permis au participant X de montrer que la vitesse instantanée est limite d'une famille de vitesse moyennes.

BIBLIOGRAPHIE

ALORY, S., CHORLAY, R., DEROUET, C., JOSSE, V., LEGRIS, C., LOENG, R., PANERO, M., ROGALSKI, M., & VIVIER, L. (2015). *Autour de la notion de dérivée en classe de première*. IREM de Paris 7. 101.

BALHAN, K., KRYSINSKA, M., & SCHNEIDER-GILOT, M. (2015). Quelle définition du concept de tangente ? Pour quelles raisons ? *Repères IREM. 101*. https://orbi.uliege.be/handle/2268/178081

DELGADILLO, E. M., MURILLO, R. P., & VIVIER, L. (2016). *Conceptions spontanées et perspectives de la notion de tangente pour des étudiants de début d'université*. first conference of INDRUM, Mar 2016, Montpellier, France.

DUFOUR, S. (2019). *Des processus de compréhension sous l'angle des représentations : Un Teaching Experiment autour de la dérivée*. [Thèse de doctorat non publiée, Université du Québec à Montréal]. L'archive de publication électroniques de l'UQAM. https://archipel.uqam.ca/12668/

DUVAL, R. (1994). Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, *6*(1), 126-143.

GANTOIS, J.-Y. (2012). *Un milieu graphico-cinématique pour l'apprentissage des dérivées dans une praxéologie « modélisation » : Potentialités et limites*. Thèse de Doctorat en Sciences, sous la direction du professeure Maggy Schneider, soutenue à l'université de Liège.392.

LABORDE, C., & CAPPONI, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *38*(1), 1-15.

PANERO, M. (2018). *Les pratiques enseignantes concernant la dérivée dans le secondaire*. Séminaire National de Didactique des mathématiques, Novembre 2016, At Paris (France). 304-324. https://ardm.eu/manifestations/seminaire-ddm-ardm/

POWELL, A. B., FRANCISCO, J. M., & MAHER, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 405-435. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.002

RESTREPO, A. M. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élevés de 6eme* [Phd thesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble I].

SCHNEIDER, M. (1988). *Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul des primitives*, Thèse de doctorat, Université catholique de Louvain.

STEFFE, L., THOMPSON, P., & GLASERSFELD, E. (2000). Teaching experiment methodology : Underling principles and essential elements. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267-306.

VANDEBROUCK, F. (2011). *Des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions du lycée à l'université : Activités des élèves et pratiques des enseignants*. Histoire et Perspectives sur les Mathématiques. Université Denis Diderot - Paris 7, 2011. Tel - 01267429. Archives- ouvertes.137.

VERGNAUD, G. (2001). *Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance*. Conférence Publiée dans les Actes du Colloque GDM-2001.22.

VIVIER, L. (2010). Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire. *IREM de strasbourg*, *15*, 28.

Enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre au Bénin : Analyse des prescriptions

Sègbégnon Eugène Oke
Gervais Affognon
Donatien Sogbavi
Florent Gbaguidi
Université d'Abomey-Calavi, Institut de Mathématique et de Sciences Physiques

RÉSUMÉ

Le passage de l'arithmétique à l'algèbre ne peut se faire complètement sans que l'apprentissage ne permette d'élaborer des concepts mathématiques puissants comme ceux d'inconnue et de variable (Vergnaud, 1989). Cette présentation analyse les manuels de mathématiques de la dernière année de l'école primaire et la première année du collège au Bénin. Elle s'inscrit dans l'objectif de faire l'état des lieux des ressources institutionnelles mises à la disposition des enseignants pour le développement de la pensée algébrique. Le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (Jeannotte, Squalli et Robert, 2020) nous a permis de regrouper les tâches des manuels selon qu'elles sont d'une généralisation, d'une modélisation ou d'un calcul. Il ressort que les activités mathématiques sont essentiellement tournées vers le calcul au détriment d'autres habiletés à développer. Ce constat pourrait être l'une des sources de certaines difficultés d'apprentissage, voire de désaffection des mathématiqual.

Mots clés : arithmétique, algèbre, généralisation, modélisation, potentiel algébrique.

1. INTRODUCTION

En mathématiques, les objets d'enseignement sont des inventions de l'esprit qui proviennent souvent d'une exploration, puis d'une exploitation et d'une codification de la réalité. C'est par exemple des nombres, des opérations, des configurations de l'espace et du plan et des grandeurs mesurables.

Dans l'enseignement primaire au Bénin, trois domaines sont à explorer selon le programme d'études à savoir l'arithmétique, la mesure et la géométrie. Les nombres sont introduits progressivement de la première année jusqu'à la sixième année. Tous les nombres, des entiers naturels aux décimaux en passant par les fractions, doivent être enseignés. Les problèmes de dimensions, de quadrature et autres permettent le développement d'une pensée algébrique intermédiaire.

Dans l'enseignement secondaire, le programme d'études de la première année de collège est divisé en quatre parties : configurations de l'espace, configurations du plan, applications du plan et organisation des données. Ces titres ne renseignent pas sur tous les contenus de chaque partie. De façon générale, nous avons constaté que les activités mathématiques abordés sont celles des activités numériques et des activités géométriques. En deuxième année de collège (classe de 5e), l'algèbre est explicitement introduite avec l'enseignement des équations que l'on retrouve dans la séquence intitulée Organisation des données.

2. PROBLÉMATIQUE

Les études réalisées dans d'autres contextes montrent que l'algèbre enseignée est réputée être, depuis longtemps, un sujet scolaire aride et difficile et les élèves éprouvent des difficultés lors de son apprentissage (Rosnick et Clément, 1980 ; Küchemann, 1981 ; Wagner, Rachlin & Jensen, 1984; Booth, 1984). Cela devient encore une évidence lorsqu'il s'agit d'enseigner l'algèbre à tous les élèves et nous pensons que notre contexte d'étude n'y échappe pas. Dans l'apprentissage de l'algèbre, les élèves ont recours souvent, à la mémorisation de règles et procédures et ils en arrivent à croire que ces activités constituent l'essence de l'algèbre (Kieran, 1992).

Dans les années 1990, un mouvement international a eu lieu pour réformer l'enseignement de l'algèbre dans l'enseignement primaire. Il a donné lieu au courant "Early Algebra" qui fait référence à la fois à un domaine de recherche, une approche curriculaire et un domaine de formation des enseignants. Ce courant met surtout l'accent sur le développement de la pensée algébrique dès l'enseignement primaire sans usage du langage littéral de l'algèbre.

Selon des chercheurs (Kaput, 1998 ; Squalli, Mary et Marchand, 2011), il s'agit d'une stratégie pour enrichir les contenus mathématiques enseignés au primaire, en offrant aux élèves des opportunités pour développer la pensée algébrique et approfondir davantage certaines notions et concepts mathématiques notamment entre autres les concepts "opération", "égalité", "équation", "régularité", "formule", "variable" et "variation".

Nous avons saisi l'opportunité de la mise en œuvre du programme d'Appui à Professionnalisation des Pratiques d'Enseignement et au Développement des REssources (APPRENDRE) pour jeter un regard sur les manuels scolaires en 6e année du primaire et en 1ère année de collège. En effet, nous participons à ce programme à travers un projet qui répond à l'appel à projet 2 « Transition école/collège » porté par l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue. Ce projet implique le Bénin, le Maroc et la Tunisie. Selon le premier objectif de ce projet, il s'agit de faire une analyse du savoir à enseigner relativement au développement de la pensée algébrique dans les programmes officiels dans chacun des 3 pays. De façon concrète, il s'agit d'analyser les prescriptions institutionnelles afin de rendre compte de la manière dont elles préparent les élèves du primaire à l'algèbre du collège.

3. CADRE DE RÉFÉRENCE THÉORIQUE

Nous convoquons le Modèle Praxéologique de Référence de la Pensée Algébrique MPRPA (Jeannotte et Squalli, 2020) comme cadre de référence. « L'algèbre est un ensemble d'activités mathématiques faisant intervenir des opérations (lois de composition internes, externes, binaires ou n-aires) pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, translation, etc.), mais répétées un nombre fini de fois » tandis que « la pensée algébrique est une manière de penser que l'on peut mobiliser dans ce type d'activités ». D'après Jeannotte et al. (2020), la pensée algébrique se déploie sur le plan opératoire, au moyen d'un ensemble de raisonnements particuliers, de manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques. Par exemple, une tendance à voir l'égalité comme une relation d'équivalence, une tendance à laisser les opérations en suspens ; une tendance à symboliser et à opérer sur des symboles ; une tendance à avoir une vision structurale (voir par exemple une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul) et d'un langage particulier.

Le MPRPA décrit l'organisation mathématique des tâches en trois Praxéologies Mathématiques Régionales (PMR) que sont Généralisation, Modélisation et Calcul. Chacune de ces PMR se subdivisent en des Praxéologies Mathématiques Locales (PML). Nous présentons ici les indicateurs des types de tâches/genre de tâche.

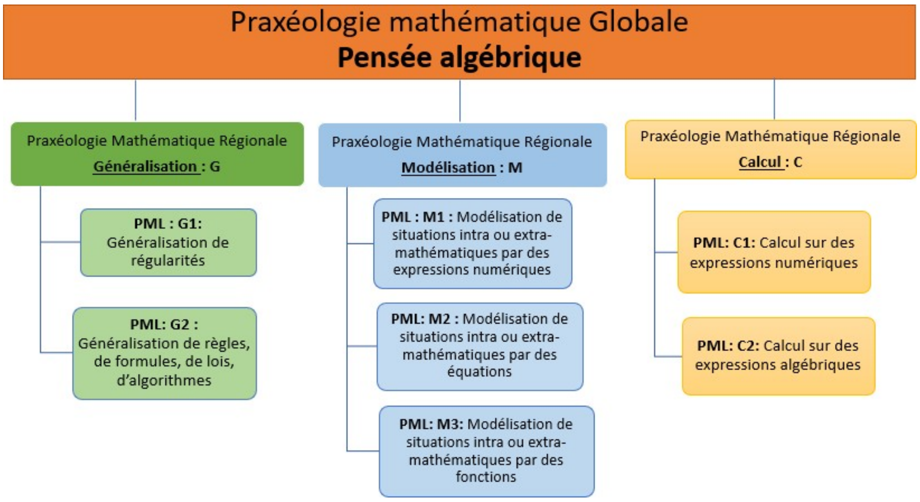


***Tableau 1**. Architecture du MPRPA*

Ce cadre de référence nous a permis de développer une méthodologie de recueil et d'analyse des données.

Les PLM qui composent chaque PMR se déclinent en des praxéologies en des praxéologies mathématiques ponctuelles.

Le tableau ci-dessous donne les genres et types de tâches associés aux praxéologies ponctuelles qui composent les PML G1 et G2 de la PMR Généralisation : G

Genre et types de tâches de la PMR : Généralisation	
PML G1 : Généralisation des régularités	PML G2 : Généralisation de règles, de formules, de lois et d'algorithmes
G1.1 Repérer une régularité dans une suite G1.2 Prolonger une suite régulière G1.3 Représenter une suite régulière dans un registre donné G1.4 Créer une suite régulière G1.5 Justifier/prouver une régularité G1.6 Comparer des suites régulières dans un sens donné	G2.1 Repérer une règle, une loi, un algorithme G2.2 Étendre le domaine de validité d'une règle, d'une loi, d'un algorithme G2.3 Représenter dans un registre donné une règle, une loi, un algorithme. G2.4 Créer une règle, une loi, un algorithme G2.5 Justifier/prouver une règle, une loi, un algorithme. G2.6 Comparer des règles, des lois, des algorithmes

***Tableau 2**. Architecture du MPRPA : Généralisation*

4. MÉTHODOLOGIE DE RECUEIL DES DONNÉES ET D'ANALYSE

Pour analyser les prescriptions institutionnelles afin de rendre compte de la manière dont elles préparent les élèves du primaire à l'algèbre du collège, nous avons choisi d'analyser les manuels scolaires officiels. En effet, nous pensons qu'à travers l'analyse des manuels scolaires officiels, nous retrouvons les documents officiels qui les soutiennent (programmes d'études et guides de l'enseignant). Ces analyses portent sur l'identification des tâches mathématiques et leur caractérisation selon leur degré du potentiel algébrique.

4.1 Identification des tâches mathématiques.

« La notion de tâche renvoie à une action finalisée, avec un début, un achèvement visé, des conditions d'effectuation, des résultats. » (Coste, 2010, p. 500). Une tâche mathématique se présente généralement sous forme d'un exercice, d'un problème ou d'une question isolée ou non. Elle peut être composée de sous-tâches, ou faire partie d'un problème comportant plusieurs tâches.

4.2 Caractérisation des tâches mathématiques

4.2.1 Tâches purement arithmétiques

Une tâche est purement arithmétique si les nombres qu'elle implique sont tous déterminés (c'est-à-dire que leurs valeurs sont connues, comme 12 ou 234). Le calcul repose uniquement sur la qualité des nombres (leurs valeurs), les opérations arithmétiques sont exécutées, le raisonnement porte toujours sur des nombres déterminés.

4.2.2 Tâches potentiellement algébriques

Une tâche est potentiellement algébrique, si elle peut être résolue par une technique algébrique ne nécessitant pas le calcul des valeurs des deux membres de l'égalité (technologie basée sur la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou par une égalité des aires).

4.2.3 Degré du potentiel algébrique de la tâche

Une tâche potentiellement algébrique peut être résolue par une technique arithmétique ou une technique algébrique. Si l'énoncé de la tâche encourage l'utilisation d'une technique arithmétique, ou si la technique algébrique est hors de portée de l'élève, nous dirons que le degré du potentiel algébrique de la tâche est faible. Dans le cas opposé, si l'énoncé de la tâche encourage l'utilisation d'une technique algébrique, ou si la technique algébrique est accessible à l'élève, nous dirons que le degré du potentiel algébrique de la tâche est fort. Nous avons ainsi une échelle à trois degrés : le degré nul (tâche purement arithmétique), le degré faible et le degré fort.

4.3 Les étapes de la méthodologie de recueil et d'analyse des données

Notre méthodologie de recueil des données et d'analyse se décline en plusieurs étapes.

Étape 1 : Construire le corpus des données et élaborer un système de codage

Étape 2 : Recueillir les données tout en répartissant les tâches selon les 3 genres de tâches : Généralisation, Modélisation et Calcul.

Étape 3 : Distinguer dans les tâches recueillies celles qui sont potentiellement algébriques et celles qui ne le sont pas (purement arithmétique).

Étape 4 : Dans les tâches potentiellement algébriques, indiquer le degré du potentiel algébrique de chaque tâche.

5. QUELQUES RÉSULTATS DE L'ÉTUDE RÉALISÉE

Les ressources pouvant servir à la constitution du corpus ont été identifiées en premier temps (textes officiels, programme et guide du programme d'études, manuels et autres documents de mathématiques en usage dans le système). Pour rester conforme à l'esprit des textes officiels et du MPRPA, le guide du programme et le manuel ont été retenus pour servir à la constitution du corpus. En respectant le protocole d'analyse, les activités rentrant dans le cadre de la recherche ont été identifiées, codées selon les indications retenues et répertoriées (entièrement ou partiellement selon leur taille dans le manuel). Ce fut ensuite, pour chaque tâche du répertoire, la classification selon le genre de tâche et le degré du potentiel algébrique.

5.1 Résultats généraux selon les praxéologies régionales et le potentiel algébrique au primaire

Les résultats selon les genres de tâches sont présentés dans le tableau suivant :

Praxéologie régionale	Généralisation	Modélisation	Calcul	Total
Effectifs	3	53	240	296
Fréquences	1,01%	17,91	81,08%	100 %
A (potentiel nul)	1,01% (3)	1,01% (3)	73,65 % (218)	75,68 % (224)
B (potentiel faible)	0% (0)	16,89% (50)	7,09 % (21)	23,98 % (71)
C (potentiel fort)	0% (0)	0% (0)	0,34 % (1)	0,34% (1)

***Tableau 3**. Totaux des tâches selon leurs genres et le degré du potentiel algébrique*

Le tableau 3 nous indique qu'il y a 296 tâches retenues dans le seul manuel de CM2 officiellement en vigueur. On les retrouve selon les trois praxéologies mathématiques (Généraliser, Modéliser et Calculer) de la praxéologie globale de la pensée algébrique. Sur les 296 tâches,

- la praxéologie régionale généraliser représente 1,01 % (3) et toutes les tâches ont un degré du potentiel algébrique nul ;

- la praxéologie régionale modéliser représente 17,91 % (53). La majorité des tâches de cette praxéologie ont un degré de potentialité algébrique faible ;

- 81,08 % (240) tâches sont associées à la praxéologie « calcul » avec un taux de degré du potentiel algébrique nul très élevé. Le plus grand taux des tâches répertoriées se retrouve dans la praxéologie « calcul ».

5.2 Résultats selon les genres et types de tâches au primaire

Les résultats selon les genres et types de tâches pour la PMR Généralisation » sont comme suit :

	PMR : GÉNÉRALISATION												Total
C	Genre de tâches : G1						Genre de tâches : G2						
Types de tâches	G1.1	G1.2	G1.2	G1.4	G1.5	G1.6	G2.1	G2.2	G2.3	G2.4	G2.5	G2.6	
Total effectif et %	33,33% (1)	0	0	0% (0)	0	0	66,67% (2)	0% (0)	0% (0)	0% (0)	0% (0)	0	3
Total A	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	100% (3)
Total B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0%(0)
Total C	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0%(0)

***Tableau 4**. Types de tâches de la PMR « Généralisation » et leur potentiel algébrique*

Le tableau 4 rend compte des trois tâches retenues dans la praxéologie régionale "Généraliser" qui comporte deux praxéologies locales G1 (Généralisation des régularités) et G2 (Généralisation de règles, de formules, de lois, d'algorithmes).

Dans la praxéologie locale G1, il y a une seule tâche retenue dans le genre de tâches G1.1 (Répertorier une régularité dans une suite) avec un degré du potentiel algébrique nul et dans le genre de tâches G2.1 (Repérer une règle, une loi, un algorithme) de la praxéologie locale G2, on retrouve deux tâches de degré de potentialité algébrique nul.

Présentons et analysons deux exemples dans la PMR : Généraliser

Exemple 1

a) recopie et complète chaque suite

(A) 2 ; 5 ; 7 ; 12 ; 19 ; … ; … ;… ; (B) 1,4 ; 2,8 ; 5,6 ; 11,2 ; … ; … ;… ; 179,2

(C) 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; … ; … ; … ;

Pour compléter la chaîne (A), il suffit de remarquer qu'après les deux premiers termes, chaque terme est obtenu en faisant la somme des deux qui le précédent. Pour compléter la chaîne (B), on constate qu'à part le premier terme, chaque terme est le double du terme qui le précède. Enfin pour la chaîne (C), après le premier terme, chaque terme est le triple du terme qui le précède.

Cette tâche se situe dans G1.1 car la régularité de chacune des suites à partir des informations de l'énoncé est bien établie. De plus le degré du potentiel algébrique de cette tâche est nul.

Exemple 2

Considérons la tâche suivante :

Exprime sous forme de pourcentage chaque fraction : (A) ; (B) ; (C) ; (F)

Les réponses attendues sont : (A) 25 % (B) 40 % (C) 250 % (D) 25 %

Déterminer le pourcentage correspondant à chaque fraction revient à déterminer la fraction équivalente de dénominateur 100 qui lui correspond. Une technique souvent employé est l'usage de la relation entre fractions et nombres décimaux. Il suffit de retrouver le nombre décimal correspondant par les mécanismes (Brousseau, 1976) puis multiplier le résultat par 100. On peut aussi rechercher la fraction de dénominateur 100 en utilisant l'aspect « commensuration » de la fraction : $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$. Il faut donc repérer le dénominateur, trouver le facteur pour le transformer en 100, puis agir sur la fraction globalement. Il s'ensuit que le degré du potentiel algébrique est nul pour cette tâche qui est du genre G2.1.

Au total, le nombre de tâches de la praxéologie régionale "Généraliser" est très peu dans le manuel de CM2. Cela peut s'expliquer par le fait que les tâches de généralisation n'ont pas été très évoquées dans le programme d'études.

5.3 Résultats généraux selon les praxéologies régionales et le potentiel algébrique (au collège)

Praxéologie régionale	Grand total des tâches			Nombre total de tâches
	Généralisation	Modélisation	Calcul	
Total effectif	19	39	232	290
Fréquences	6,55 %	13,45 %	80,00 %	100 %
A (potentiel nul)	36,84% (07)	33,33% (13)	95,69% (222)	83,45%
B (potentiel faible)	26,32% (05)	41,03% (16)	02,59% (06)	9,31 %
C (potentiel fort)	36,84% (07)	25,64% (10)	01,72% (04)	7,24 %

Tableau 5*. Totaux des tâches selon leurs genres et le degré du potentiel algébrique*

Ce tableau montre que dans le manuel scolaire de mathématiques en usage en 6e, la pensée algébrique devrait se développer avec des tâches constituées de 80% de calcul, 13,45% de modélisation et de 6,55% de généralisation. Le potentiel algébrique qui se dégage de ces tâches est très faible : nul dans 83,45% des cas, faible dans 9,31% des cas et fort seulement dans 7,24% des cas.

6. SYNTHÈSE ET CONCLUSION

Des constats précédents, il ressort une nette domination de la PMR "CALCUL" (ou une quasi-absence des PMR GÉNÉRALISATION & MODÉLISATION) dans les manuels au cours de la transition primaire-secondaire au Bénin. Le tableau ci-après permet d'observer l'évolution des PMR ainsi que les classifications des tâches selon le MPRPA (dans les manuels officiels) au cours de la transition primaire-secondaire au Bénin.

	Généralisation	Modélisation	Calcul
CM2	1,01 %	17,91%	81,08 %
6e	6,55 %	13,45 %	80 %

Tableau 6. *Évolution des PMR dans la transition*

Nous constatons ici une large domination de la PMR "CALCUL". Le calcul a donc la priorité dans les choix didactiques de ces manuels. Ainsi dans la transition primaire-secondaire au Bénin, les manuels officiels n'introduisent pas l'algèbre à travers des tâches de généralisation ni de modélisation. Quelques questions se posent alors dans ces conditions : les degrés du potentiel algébrique dans la PMR "CALCUL" ou les degrés du potentiel algébrique dans le cas général sont-ils suffisamment en grand nombre pour combler les vides laissés par l'absence des PMR "GÉNÉRALISATION'' et "MODÉLISATION'' ?

Ces deux questions nous amènent à observer l'évolution des types de tâches de la PMR "CALCUL" d'une part et l'évolution du degré du potentiel algébrique dans le cas général d'autre part.

Nos constats confirment également la manipulation des règles de calcul déjà conçues (en classe) sans (réellement) les employer dans une chaîne où elles servent à résoudre des situations (plus ou moins) complexes. Nous justifions ces conclusions par la large domination du taux de la fréquence des tâches de la PML C1 (plus de 86 % pour C1.1 seule) Calcul sur des expressions numériques et la faiblesse de la fréquence des tâches de la PML C2 Calcul sur des expressions algébriques. Ainsi le modèle constructiviste semble manqué d'éléments qui fondent la construction des connaissances. Les règles mathématiques semblent naître ex-nihilo ou d'une situation qui ne suffit pas à leur donner sens et à les mettre en relation avec les conceptions cognitives qui fondent les connaissances des élèves.

Cet emploi des règles mathématiques se remarque plus clairement lorsque nous observons l'évolution des degrés du potentiel algébrique. Comme l'indique le graphique ci-dessous, les potentiels algébriques n'ont quasiment pas été pris en compte dans la rédaction de ces manuels utilisés pour apprendre les mathématiques dans la transition primaire-secondaire au Bénin.

	CM2	6e
A	75,68 %	82,45 %
B	24 %	8,96 %
C	0,32 %	7,59 %

Tableau 7. *Évolution du degré du potentiel algébrique dans la transition*

Ceci se justifie par une baisse harmonique des taux des degrés du potentiel algébrique (d'une manière générale), la nette domination du degré nul du potentiel algébrique et la valeur négligeable des fréquences des degrés non nuls.

Cette analyse a révélé que l'arithmétique occupe encore une place prépondérante dans le programme du cours primaire, surtout à cause de son caractère transversale par rapport aux autres domaines. La transition vers l'algèbre est très peu amorcée. Ce constat est très remarquable à travers la faiblesse des tâches de la praxéologie Modélisation et surtout de Généralisation. Il semble ne pas être dans le même sens que certaines compétences à développer exigées par les programmes d'études. Cela peut être également une priorité accordée au CACUL pour faire opérer plus les utilisateurs sur les nombres. Cette priorité accordée au CALCUL peut aider à apprendre les opérations mais peut se révéler comme obstacle vue que les sens des nombres et des opérations ne sont pas suffisamment usités au cours de l'activité de l'élève. En somme tout est fait comme si l'algèbre n'est pas visée ou si elle est déjà acquise. Ainsi l'algèbre semble ne pas être un objectif du manuel et éventuellement de l'institution vue que les rapprochements entre l'équipe de conception du manuel et celle qui a rédigé les programmes d'études. Une question se pose : est-ce un choix ? Néanmoins tout ne devrait pas être ainsi consommé car les choix didactiques dans l'enseignement/apprentissage au CM2 peuvent compléter les contenus du manuel pour une transition plus avancée vers l'algèbre.

Il ressort également de cette étude que le développement de la pensée algébrique n'est pas un objectif des manuels de mathématiques dans la transition primaire-collège au Bénin. Ce défaut de culture à l'algèbre dans cette transition aura des effets sur l'apprentissage des mathématiques en général et des nombres en particulier. En effet le développement de la pensée algébrique peut avoir une influence sur la conceptualisation du nombre et des diverses situations qui fondent les mathématiques modernes ainsi que leurs applications.

Nous remercions sincèrement les inspecteurs Magloire COSSOU et Pierre DOSSOU DOSSA pour leurs précieuses collaborations au recueil de données pour cette étude.

BIBLIOGRAPHIE

BOOTH, L. (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. Windsor: NFER-NELSON.

BROUSSEAU, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*. Louvain-la-Neuve. pp.101-117, <hal-00516569v1>

COSTE, D. (2010). Tâche, progression, curriculum. *Canadian Modern Language Review/ La Revue Canadienne Des Langues Vivantes*, 66(4), 499–510. https://doi.org/10.3138/cmlr.66.4.499

JEANNOTTE, D., SQUALLI, H. et ROBERT, V. (2020). Mise à l'épreuve d'un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique par l'entremise d'une analyse du Programme de Formation de l'École Québécoise au primaire. Actes du colloque GDM 2019 - *À quoi ressemble aujourd'hui la recherche en didactique des mathématiques au Québec ?*

KAPUT, J.J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by «algebrafying» the K-12 curriculum. In the Proceedings of a National Symposium, may 27 and 28, 1997. *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum* (pp. 25-26). Washington, D.C. : National Academy Press.

KIERAN, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In A. D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 390-419). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics Lins, 1992.

KÜCHEMANN, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics* (pp. 102-119). London: John Murray.

ROSNICK, P. et CLEMENT, J. (1980). Learning without understanding: the effects of tutoring strategies on algebra misconceptions. Journal of Mathematical Behavior, volume 3, n°1, pp. 3-27.

SQUALLI, H., MARY, C., & MARCHAND, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre: cas du Québec et de l'Ontario. In Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique (Vol. 1, pp. 65-78). De Boeck Supérieur.

VERGNAUD G. (1989) La théorie des champs conceptuels, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.10 n°2-3, pp.133-170, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

WAGNER, S., RACHLIN, S. L. & JENSEN, R.J. (1984). *Algebra learning project : Final report*. Athens : University of Georgia, Department of Mathematics Education.

Groupe de travail n°3 (GT3)

Formation des enseignants et le projet de l'interdisciplinarité

Bilan du GT 3

FORMATION DES ENSEIGNANTS ET LE PROJET DE L'INTERDISCIPLINARITÉ

Najoua Ibn Haj Ali[1] – Moussa Mohamed Sagayar[2]

Introduction

Le 3ième colloque de l'Association de Didacticiens des Mathématiques Africains (ADiMA3) se situe dans les activités du projet qui a été initié par une équipe internationale de chercheurs africains en didactique des mathématiques. Ce projet de recherche est destiné à contribuer au développement de la recherche en didactique des mathématiques et des sciences et des techniques à tous les niveaux de l'enseignement, avec un souci particulier pour le développement de nouvelles recherches dans ces domaines et pour le dialogue avec les mathématiciens, les physiciens, les informaticiens, les mécaniciens. Dans le cadre de ADiMA3 qui a eu lieu en Tunisie à Hammamet du 15 au 20 août 2022 nous avons co-animé trois présentations orales. Une présentation vise la formation des enseignants et les deux autres l'interdisciplinarité ; à savoir utilisation d'un logiciel dans un enseignement de mathématiques et utilisation de mathématiques en stœchiométrie.

Synthèse des trois présentations

Nous faisons dans ce qui suit la synthèse des présentations.

Communication orale 1 : Catégorisation de quelques problèmes de proportionnalité

La communication de Mohamed Wardi OUNI et Slim MRABET, menée sur l'enseignement primaire tunisien en classe de sixième s'appuie sur certains travaux de vergnaud. Les auteurs ont fait une catégorisation des problèmes de proportionnalité via une représentation graphique sous forme de tableau de chaque cas de figure. La stratégie à adopter en classe est de demander à l'élève de représenter les données du problème dans un tableau, d'associer ce tableau à un cas de figure pré établi et après de mener la résolution (qui devient évidente) dont l'objectif est d'intégrer cette stratégie dans la formation des enseignants. Donc ce que les auteurs proposent pour que les élèves aient un meilleur apprentissage c'est de représenter le problème par un tableau de le mettre dans une classe de la catégorisation et la résolution devient facile. Ces représentations sous forme de tableaux peuvent avoir le double rôle de permettre de mieux comprendre les relations entre les données et les inconnus, et d'aider à unifier certaines procédures de résolution. La catégorisation fait recours aux expressions mathématiques suivantes : C^2_5-1, C^3_7-1, C^4_9-1 et $C^p_{2(p+1)-1}$-1 où p est le nombre de données (donc on obtient un tableau à $p+1$ colonnes) pour rassembler des cas de proportionnalité dans des classes de problèmes bien déterminées.

Communication orale 2 : Introduire le logiciel de la géométrie dynamique pour améliorer l'apprentissage des fonctions numériques au lycée

[1] Université de Tunis, ESSECT, LR11ES02 – LARIME, 1089, Montfleury, Tunisie. najoua.hajali@essect.u-tunis.tn
[2] Ecole Normale Supérieure Université Abdou Moumouni Niamey Niger- mmsagayar@gmail.com

Une deuxième communication de Abdoul Massalabi NOUHOU et Moussa MOHAMED SAGAYAR présente une recherche menée sur l'enseignement des fonctions numériques en utilisant un logiciel dynamique à savoir GéoGebra expérimentée sur une classe ordinaire de mathématique de la terminale scientifique publique Nigérienne (18-19 ans) dont la question de recherche est « L'introduction du logiciel de la géométrie dynamique GeoGebra impose – t – elle – au élèves du lycée de revoir leurs stratégies de résolutions de problèmes sur les fonctions numériques ? » Les approches théoriques mobilisées portent sur la sémiotique vient du mot grec *sémiosis* qui signifie action de marquer d'un signe et le champ conceptuel de Duval (1993) définit les registres de représentations sémiotiques comme des modes de représentations des objets mathématiques. La contribution s'intéresse au double processus de construction des connaissances avec GeoGebra en mettant en évidence *les liens artefact/tâche et artefact/connaissance mathématique.* L'artefact permet d'accomplir des tâches spécifiques favorisant l'émergence des significations personnelles à travers la production des signes liées à l'activité avec l'artefact. L'objectif étant celui d'apprendre, alors l'utilisation de l'artefact est reliée à une connaissance mathématique spécifique

Communication orale 3 **: Regard interdisciplinaire sur l'apprentissage et l'enseignement des fractions et des proportions : le cas de la stœchiométrie en chimie**

La communication de Abderrahmane BENRHERBAL et Said ABOUHANIFA s'inscrit dans un contexte d'interdisciplinarité ; utilisation d'un savoir mathématique en chimie en 5$^{\text{ième}}$ année secondaire québécoise.
Les auteurs s'intéressent aux situations de l'enseignement de la stœchiométrie en chimie qui utilisent des fractions et des proportions. Une analyse de situations d'enseignements et de productions d'élèves en classe de chimie de 5$^{\text{ième}}$ secondaire québécois (année avant le bac) dans le champ conceptuel du savoir « stœchiométrie » qui fait appel aux notions mathématiques « fraction » et « proportion » issus du domaine mathématique a été réalisée. Les analyses des productions des élèves ont montré que quatre types d'incidents didactiques liés au champ conceptuel sont apparus. Des formes d'aide de l'enseignant sont apparues à savoir deux types de proximité horizontale et descendante. Trois effets de contrats ont été relevés à savoir l'effet topaze, le paradoxe du comédien et l'effet d'une attente incomprise. C'est une recherche qualitative/interprétative, l'analyse se concentre principalement sur les interactions entre l'enseignant et les élèves ainsi que sur les productions de ces derniers. L'analyse des interactions se fait en fonction des incidents didactiques qui émergent le plus souvent des erreurs des élèves. Elle rend également possible l'identification des aides apportées aux élèves selon les types de proximité ainsi que certains effets de contrat didactique. Les résultats indiquent que la mobilisation et l'utilisation des fractions et des proportions dans le contexte de la stœchiométrie en chimie ne vont pas de soi pour les élèves et influencent les interactions didactiques lors de l'enseignement et l'apprentissage de ce concept. *

Regard interdisciplinaire sur l’apprentissage et l’enseignement des fractions et des proportions : le cas de la stœchiométrie en chimie

Abderrahmane Benrherbal
Université Mohammed VI Polytechnique (Maroc)
Saïd Abouhanifa
Centre Régional des Métiers de l’Éducation et de la Formation Casablanca- Settat (Maroc)

RÉSUMÉ

Cette recherche s’intéresse à l’utilisation des fractions et des proportions dans le contexte interdisciplinaire. L’objectif de cette étude est de comprendre comment l’utilisation des concepts de fraction et de proportion dans le contexte interdisciplinaire peut avoir des incidences sur l’apprentissage et l’enseignement de la stœchiométrie. Pour atteindre cet objectif, cette recherche repère la nature des interactions didactiques entre un enseignant et ses élèves à propos des fractions et des proportions dans le contexte de la stœchiométrie en chimie de cinquième secondaire.

Basée sur une recherche qualitative/interprétative, l’analyse se concentre principalement sur les interactions entre l’enseignant et les élèves ainsi que sur les productions de ces derniers. L’analyse des interactions se fait en fonction des incidents didactiques qui émergent le plus souvent des erreurs des élèves. Elle rend également possible l’identification des aides apportées aux élèves selon les types de proximité ainsi que certains effets de contrat didactique. Nos résultats indiquent que la mobilisation et l’utilisation des fractions et des proportions dans le contexte de la stœchiométrie en chimie ne vont pas de soi pour les élèves et influencent les interactions didactiques lors de l’enseignement et l’apprentissage de ce concept.

Mots-clés : Didactique des mathématiques; Interactions didactiques; Fractions et proportions; stœchiométrie; Incidents didactiques; Types de proximité; Effets de contrat.

1. INTRODUCTION

Dans cette étude, nous nous intéressons au calcul de la stœchiométrie qui permet d’analyser les quantités de réactifs et de produits qui sont en jeu au cours d’une réaction chimique. Il sert surtout à calculer le nombre de moles et les masses en présence dans la réaction chimique. Au Québec, ce calcul est au programme de chimie de cinquième secondaire (MEES, 2020). Nous avons choisi ce concept car, pour calculer la stœchiométrie, les élèves doivent mobiliser et utiliser correctement les concepts de fraction et de proportion. Pour résoudre un problème de stœchiométrie, les élèves doivent poser la proportion en identifiant chacune des quantités et en choisissant le procédé le plus pratique.

L’objectif général de cette étude est de décrire et d’analyser les interactions entre un enseignant et ses élèves à propos des fractions et des proportions lors de situations de calcul stœchiométrique. Dans les sections qui suivent, nous décrivons la problématique au cœur de cette recherche, laquelle fait état des difficultés éprouvées par les élèves en lien avec les concepts de fraction et de proportion. Après avoir formulé notre question de recherche, nous poursuivons en présentant notre cadre conceptuel, lequel opérationnalise les concepts qui nous permettent d’analyser les interactions didactiques: les incidents didactiques (Roditi, 2005), les proximités (Bridoux et al.,

2015) et les effets de contrat (Brousseau, 2010). Nous formulons ensuite nos objectifs spécifiques de recherche et dans la section suivante, nous donnons des indications sur la méthodologie utilisée pour atteindre ces objectifs. Nous présentons enfin nos résultats et en discutons avant de conclure.

2. PROBLÉMATIQUE

Une compréhension conceptuelle de fraction et de proportion est essentielle en raison des liens interdisciplinaires et intra disciplinaires qui s'étendent sur deux cycles du secondaire. Cette diversité d'utilisation rend les notions de la fraction / proportion et leur construction fondamentale, en ce sens que les élèves doivent les maîtriser pour traiter un grand nombre de situations, issues des mathématiques ou d'une autre discipline.

Si les difficultés des élèves en lien avec les fractions et les proportions sont chose courante, un examen de la littérature portant sur l'enseignement et l'apprentissage de ces concepts permet de mieux comprendre leur origine. Premièrement, l'élaboration des connaissances sur les nombres rationnels exige un changement en profondeur de la conception du nombre développée à partir d'activités sur les nombres naturels. Comme le signalent plusieurs chercheurs (Benrherbal, 2021, Kieren, 1988; Van Hoof et al., 2015), l'apprentissage des nombres naturels crée des obstacles dans le développement d'une compréhension adéquate des nombres rationnels. Les chercheurs affirment que les différences fondamentales entre ces deux types de nombres ne sont pas toujours prises en compte par les élèves. Deuxièmement, il est possible de relier les difficultés éprouvées au champ conceptuel à l'intérieur duquel se situe la fraction (Kieren, 1980). En effet, la compréhension du concept de fraction est étroitement liée à la coordination de cinq sous-constructions (partie-tout, mesure, rapport, quotient et opérateur), lesquelles impliquent une réinterprétation des deux membres de la fraction et de la fraction elle-même (Blouin, 1993; Kieren,1980). Troisièmement, il peut être difficile, pour les élèves, de conférer un sens aux opérations sur les fractions, en raison de la façon suivant laquelle ces opérations sont enseignées. Des chercheurs (Desjardins et Hétu, 1974; Gabriel et al., 2013) soutenaient que l'enseignement était en partie responsable des difficultés éprouvées puisqu'il introduisait les algorithmes liés aux opérations sur les fractions avant même que les élèves aient atteint le niveau de la fraction-relation, c'est-à-dire avant qu'ils aient compris que la fraction représente non seulement une quantité, mais aussi une relation entre deux termes. Ce constat est préoccupant puisque l'élève est susceptible de demeurer prisonnier d'une pensée algorithmique (Benrherbal, 2021), laquelle peut potentiellement l'empêcher d'appréhender la richesse du champ conceptuel de la fraction.

Comme nous venons de le constater, les fractions et les proportions servent de tremplin à de nouveaux apprentissages, notamment au 2^{e} cycle du secondaire. Toutefois, la mobilisation des concepts de fraction et de proportion ne semble pas aller de soi pour les élèves. Cela pourrait constituer un obstacle à leur utilisation dans le contexte intra et interdisciplinaire. Compte tenu de ces difficultés nous posons la question suivante : Comment les situations faisant intervenir les fractions et les proportions influencent-elles l'apprentissage et l'enseignement de la stœchiométrie en chimie?

Les incidents didactiques (Roditi, 2005), les proximités (Bridoux et al., 2015) et le contrat didactique (Brousseau, 1990) offrent une perspective pour interpréter et analyser les interactions didactiques et constituent également des indicateurs qui nous permettent de donner une réponse à notre question de recherche.

3. Cadre conceptuel

Nous définissons ici ce que nous entendons par incident didactique, par proximité ainsi que par effet du contrat didactique.

3.1 Les incidents didactiques

L'incident didactique est un concept pertinent pour analyser les interactions didactiques, notamment lorsque les élèves commettent des erreurs qui n'avaient pas été anticipées par l'enseignant. Plus précisément, nous appellerons incident didactique un écart entre la planification et la mise en œuvre d'une activité en classe, marquant un décalage « négatif » par rapport au but visé par la tâche (Rogalski, 2000), qui se produit de manière imprévue (Aldon, 2011) et nécessite l'intervention de l'enseignant (Roditi, 2003). Dans la présente étude, les incidents vont être étudiés comme des éléments déterminants de la dynamique de la classe dans l'interaction entre l'enseignant et les élèves en relation avec le milieu didactique (Roditi, 2005).

3.2 Les proximités

Une proximité est une activité de l'enseignant qui vise à réduire l'écart entre ce qu'il souhaite enseigner et ce que les élèves connaissent, font ou disent. Elle est toutefois manifeste lors des allers-retours entre les interventions de l'enseignant et l'activité des élèves.

Notre étude s'intéresse principalement aux proximités qui mettent en jeu des liens portant sur le contenu disciplinaire du cours, des liens entre les différentes tâches à réaliser ou encore des relations entre les activités et les interventions (Bridoux et al., 2015). Bridoux et ses collaborateurs (2015) distinguent trois types de proximité. C'est leur place par rapport aux moments d'exposition des connaissances et les liens qu'ils supposent entre l'activité et les interventions qui déterminent ces types de proximité. Le tableau 1 offre un aperçu synoptique des interventions associées à chaque type de proximité.

Type de proximité	Type d'intervention
Proximités horizontales	Ces proximités peuvent porter sur les interactions en train de se faire, à un niveau général. Elles peuvent aussi expliciter localement une suite de calculs ou des différences entre écrit et oral.
Proximités descendantes	Ces proximités donnent naissance à des interventions qui se placent entre ce qui a été exposé (les savoirs institutionnalisés) et les situations que les élèves devront ensuite traiter seuls ou avec l'aide leur enseignant.
Proximités ascendantes	Ces proximités donnent naissance à des interventions qui se placent entre les situations que les élèves ont déjà traitées et les savoirs qui seront institutionnalisés (mots, définitions, propriétés).

Tableau 1*. Les types de proximité selon les types d'intervention (Bridoux et al., 2015)*

3.3 Les effets du contrat didactique

Tout apprentissage d'un nouveau savoir provoque des ruptures de contrat par rapport au savoir ancien et l'enseignement va reposer sur ces ruptures (Brousseau, 1983). Cela dit, si le rapport au savoir des élèves n'évolue pas comme prévu, ce qui est le cas lorsque se produit un incident didactique, l'enseignant doit absolument provoquer la rupture du contrat didactique, sans quoi les élèves ne réaliseront pas les apprentissages prescrits. Or, la volonté de maintenir le contrat didactique peut affecter l'activité de l'enseignant de différentes façons; il s'agit là des effets du contrat didactique (Brousseau, 1983).

Dans cette étude, nous avons repéré trois effets qui ont été documentés dans la littérature : l'effet Topaze, l'effet du paradoxe du comédien et l'effet de l'attente incomprise. En voici une description succincte. L'effet Topaze se manifeste lorsque l'enseignant réduit la charge du travail demandé aux élèves en donnant des explications abondantes ou des indices pour les aider à traiter certaines situations. En ce qui a trait au paradoxe du comédien, cet effet se manifeste lorsque l'enseignant pose des questions aux élèves à propos d'un savoir et qu'au même moment, il apporte lui-même les réponses. Enfin, l'effet de l'attente incomprise consiste à croire qu'une réponse attendue des élèves va de soi pour eux. Il fait référence à la façon suivant laquelle l'attente d'un résultat affecte la perception et le comportement de l'enseignant.

4. OBJECTIFS SPÉCIFIQUES DE RECHERCHE

La présente étude a pour objectif général la description et l'analyse des interactions entre un enseignant et ses élèves à propos des fractions et des proportions dans le contexte de stœchiométrie en chimie. De façon plus spécifique, nous avons fixé les objectifs suivants : 1) Décrire les incidents didactiques qui surviennent lors de l'enseignement du concept de rendement énergétique ; 2) Analyser les aides apportées aux élèves selon le type proximité utilisé durant cet enseignement ; 3) Décrire les effets de contrat qui surviennent durant cet enseignement.

Dans la section qui suit, nous donnons quelques indications quant à la méthodologie utilisée pour atteindre ces objectifs.

5. MÉTHODOLOGIE

Nous avons décrit et analysé les interactions entre un enseignant et ses élèves au cours d'une situation d'enseignement et d'apprentissage de la stœchiométrie. Le groupe classe qui a participé à l'expérimentation fait partie du programme régulier de cinquième secondaire avec option chimie. Il est composé, de 27 élèves.

5.1 Plan d'instrumentation

Les productions d'élèves et les enregistrements vidéo de l'expérimentation en classe sont les deux principales stratégies de collecte de données. Les productions d'élèves nous permettent d'analyser les procédures utilisées par les élèves lors de la réalisation des tâches et de repérer la nature de leurs erreurs. Les vidéos nous permettent de retracer les interventions des enseignants par rapport aux erreurs des élèves.

L'activité se divise en deux parties : la première est consacrée au travail individuel où les élèves se mettent en action pour résoudre les exercices pendant la moitié de la période, soit 35 minutes; la deuxième partie s'attarde à la correction en groupe où certains élèves sont invités à venir au tableau pour montrer comment ils ont résolu les exercices.

5.2 Plan d'analyse

Nous avons analysé les interactions entre l'enseignant et les élèves à l'aide de catégories selon les démarches proposées par Thomas (2006) et nous avons privilégié une approche de type « analyse de contenu ». Notre analyse se concentre premièrement sur les interactions entre l'enseignant et les élèves pour identifier les types d'incident didactique (Aldon, 2011; Roditi, 2003, 2005) et qualifier la nature des erreurs. En deuxième lieu suivent les aides procurées aux élèves selon les types de proximité (Bridoux et al., 2015) adoptés par l'enseignant, puis l'identification des effets du contrat didactique Brousseau (1990).

6 RÉSULTATS

Dans cette section, nous commençons par décrire les incidents didactiques qui ont été observés lors de l'enseignement du concept de la stœchiométrie. Nous poursuivons en analysant les aides apportées aux élèves selon le type proximité utilisé par l'enseignant. Nous terminons en décrivant les effets de contrat observés durant l'expérimentation.

6.1 Les types d'incidents didactiques

Quatre incidents ont émergé de l'analyse des interactions didactiques. Nous les décrivons dans les paragraphes qui suivent

6.1.1 Erreur liée à l'identification des liens de proportionnalités qui existent entre les coefficients de la réaction chimique

Énoncé : Soit la réaction suivante : NO(g) + ½ O2 (g) → NO2 (g)
Combien de moles de dioxygène sont nécessaires pour former 60,00 g de dioxyde d'azote?

La résolution de cet exercice exige une analyse relationnelle entre les données pour établir une proportion. Ainsi, la proportion obtenue permet de trouver le nombre de moles de dioxygène nécessaire pour produire 60 grammes de dioxyde d'azote sachant que 1/2 mole de dioxygène forme 46,01 grammes de dioxyde d'azote.

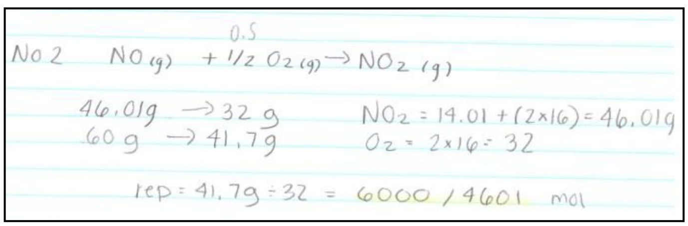


Figure 1. *Production 1*

Les traces laissées par l'élève montre qu'il réalise une correspondance entre la masse d'une mole d'oxygène (32 grammes) et la masse d'une mole de dioxyde d'azote (46,01 grammes) au lieu de faire une correspondance entre la masse d'une ½ mole d'oxygène (16 grammes) et la masse d'une mole de dioxyde d'azote (46,01 grammes). Il attribue une valeur unitaire au coefficient de l'oxygène impliqué dans la proportion même si ce dernier est différent de 1. Cette erreur pourrait être due à la difficulté à identifier les grandeurs en relation dans la situation proposée et identifier les liens de proportionnalités qui existent entre les coefficients de la réaction chimique.

6.1.2 Équivalence entre deux rapports sans lien de proportionnalité

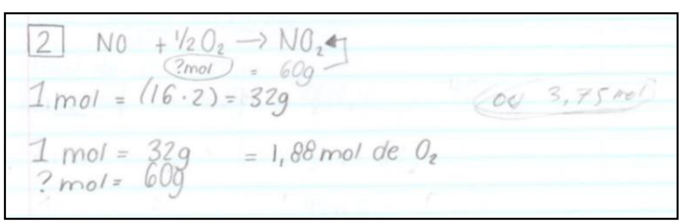


Figure 2. *Production 2*

Dans le même contexte de l'exercice précédent, les traces laissées par l'élève montrent que ce dernier établit l'égalité entre deux rapports qui n'ont pas de lien de proportionnalité. En effet, il établit un rapport entre la masse d'oxygène et la masse de dioxyde d'azote $\frac{32\ g\ (masse\ d'oxygène)}{60\ g\ (masse\ de\ dioxyde\ d'azote)}$ au lieu de faire un rapport entre la masse de dioxyde d'azote initial et final $\frac{46{,}01\ g\ (masse\ de\ dioxyde\ d'azote)}{60\ g\ (masse\ de\ dioxyde\ d'azote)}$. Cette erreur pourrait être provoquée par l'identification et l'interprétation des relations de proportionnalité lors de l'analyse relationnelle des données de l'exercice afin de modéliser la situation par une proportion. Ce qui induit à une erreur dans la proportion établit par l'élève :

$$\frac{32\text{ g (masse d'oxygène)}}{60\text{ g (masse de dioxyde d'azote)}} = \frac{1\text{ mol (d'oxygène)}}{\text{Nombre de moles d'Oxygène pour produire 60 g de dioxyde d'azote}}$$

6.1.3 Connaissance-obstacle conduit l'élève à donner une réponse erronée

Énoncé : « Soit la réaction suivante : $Sb_{(g)} + \frac{3}{2}Cl_{(2)\,(g)} \rightarrow SbCl_{3\,(g)}$ Combien de mole(s) de dichlore sont nécessaires pour former $\frac{1}{5}$ de mole de $SbCl_{3\,(g)}$? »

À partir des données de l'énoncé, la proportion comme égalité de deux rapports est envisagée et elle permet d'utiliser la règle de trois: $\frac{1}{5} = \frac{x}{\frac{3}{2}} \leftrightarrow x = \frac{\frac{3}{2}\times 1}{5} \rightarrow x = \frac{3}{10} mol\ de\ Cl_2$.

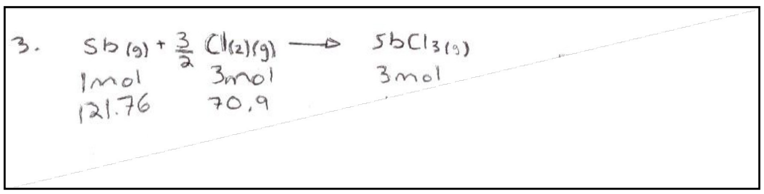


Figure 3. *Production 3*

Pour trouver le nombre de moles mises en jeu dans la réaction chimique, l'élève a multiplié le coefficient ($\frac{3}{2}$) de l'atome Cl_2 par son indice (2). Il a fait de même pour la molécule $SbCl_3$ (coefficient =1 et indice =3). Il n'avait pas à prendre en compte l'indice car le nombre de mole pour Cl_2 devrait être $\frac{3}{2}$ au lieu de 3 et 1 mole pour la molécule $SbCl_3$ au lieu de 3. Deux raisons peuvent expliquer cette erreur. D'une part, cette erreur pourrait être la conséquence d'un obstacle (Brousseau, 1983) car cette façon de faire par l'élève révèle une connaissance valable pour balancer les équations chimiques. Toutefois cette connaissance n'est plus valide dans le contexte d'une équation équilibrée qui nécessite le calcul de la stœchiométrie. Cet obstacle épistémologique entraine des erreurs et engendre des réponses fausses. D'autre part, cette erreur pourrait s'expliquer aussi par la difficulté à identifier la relation entre les données.

La description des erreurs	La nature des erreurs
Erreur liée à l'identification des liens de proportionnalités qui existent entre les coefficients de la réaction chimique. L'élève attribue une valeur unitaire à chaque coefficient mis en jeu dans la proportion même si ce dernier est différent de 1;	Volet conceptuel
Équivalence entre deux rapports sans lien de proportionnalité $\frac{\textbf{32 g (masse d'oxygène)}}{\textbf{60 g (masse de dioxyde d'azote)}} = \frac{\textbf{1 mol (d'oxygène)}}{\textbf{Nombre de moles d'Oxygène pour produire 60 g de dioxyde d'azote}}$;	Volet conceptuel
Multiplier le coefficient ($\frac{3}{2}$) de l'atome $\boldsymbol{Cl_2}$ par son indice (2) c'est une connaissance valable pour équilibrer les équations chimiques. Elle devient obstacle dans le contexte d'une équation déjà équilibrée;	Volet conceptuel

Tableau 2. *Les types d'incidents didactiques dans le contexte de la stœchiométrie*

6.2 Les aides apportées aux élèves selon le type proximité utilisé par l'enseignant

Dans la section suivante, nous présentons les six formes d'aide que nous avons observées durant les séances et que nous avons analysées selon le concept de proximité de Bridoux et al. (2015).

6.2.1 Faire des rappels

L'aide se concrétise par des rappels sur les caractéristiques de l'oxygène comme élément diatomique. Elle se rapporte aussi au contexte de la situation qui nécessite l'utilisation des fractions pour résoudre la tâche.

> **Enseignant** : […] Il y en a qui ont oublié qu'une réaction de combustion c'était toujours une réaction avec du O_2. Pourquoi l'oxygène O_2 ? Parce que c'est un élément qui est toujours diatomique et ça produit toujours, lorsqu'on veut du carbone et de l'hydrogène, du CO_2 et de la vapeur d'eau. Bien sûr il y a eu des fractions d'impliquées. Quelques-uns parmi vous ont multiplié par 2 ici pour éliminer le problème des fractions. Mais n'oubliez pas, la question était bel et bien : la synthèse d'une mole de NH_3. C'est pour ça que ça nous obligeait à donner des fractions.

La proximité est qualifiée d'horizontale puisqu'elle se porte sur la correction qui est en train de se faire et qui constitue un complément de cours pour la notion de stœchiométrie.

6.2.2 Guider l'élève dans son raisonnement

L'enseignant verbalise l'élève afin de le guider dans son raisonnement.

> **Enseignant** : Dans le no 1. Quelle est l'erreur que tu perçois?
> **Élève** : 3/2.
> **Enseignant** : 3/2, ce ne serait pas bon? Pourquoi? Qu'est-ce qui n'est pas égal, les H?
> **Élève** : Oui.
> **Enseignant** : Avec 3/2, ça ne fait pas 3?

La proximité est qualifiée descendante puisque l'aide consiste à soutenir et à guider l'élève dans sa démarche en lui posant des questions fermées ciblées sur le contexte de l'exercice.

6.2.3 Donner une explication concernant le choix de la fraction à utiliser

L'enseignant donne une explication concernant le choix de la fraction à utiliser pour la synthèse d'une mole d'ammoniac $NH_{3\,(g)}$ à partir des éléments qui le composent : $N_2(g)+3\ H_2(g) \rightarrow 2\ NH_3(g)$.

> **Élève** : Le H_2, dans le fond, c'est-tu parce que je suis obligée de le mettre en décimales *incompréhensible*
> **Enseignant** : Exact! Ils sont toujours *binaires*. Deux, c'est pour ça qu'on est obligé de mettre la fraction 3/2 pour avoir *incompréhensible.* Ça marche?

Cette aide manifeste une proximité horizontale puisqu'elle est reliée à l'apprentissage du savoir mis en jeu soit le balancement d'une équation chimique et la stœchiométrie.

6.2.4 Rappeler la définition de la concentration et le contexte dans lequel est utilisée

Énoncé **:** Quelle est la concentration molaire (mol/L) de chacune des solutions suivantes?

a) $\frac{3}{8}$ de mole de NaOH dans 125 mL de solution
b) 0,10 mole de $Ba(NO_3)_2$ dans $\frac{3}{20}$ de litre de solution

Avant de rappeler la question, l'enseignant précise le contexte dans lequel la question est posée. Il s'agit de la concentration qui est définie par les relations suivantes selon deux formules : $c =$

$\frac{n}{v}$ *et* $c = \frac{m}{v}$ [1]. Les élèves doivent tenir compte du contexte pour choisir l'une ou l'autre des formules et l'utiliser pour résoudre l'exercice.

> **Enseignant** : […] Dans les portions de concentration, vous savez qu'il y a deux formules. La concentration qui implique un nombre de mol en fonction d'un volume *ou* la concentration qui implique une *masse* en fonction d'un volume. La question nº 4, question nº 4A, on demande de trouver une concentration en *grammes* par litres, donc une concentration qui tient compte de la masse par unité de volume.

La proximité est qualifiée d'horizontale puisqu'il s'agit d'un rappel des différentes formes de concentration.

6.2.5 Expliquer une façon de faire

L'extrait montre que l'élève éprouve de la difficulté à exécuter sans calculatrice la multiplication d'une fraction par un nombre selon l'opération suivante $\frac{3}{8}\, de\ 40$.

> **Enseignant** : Comment tu fais ce calcul-là? 3/8 de 40 grammes.
> **Enseignant** : marque-moi ça au tableau. Fais ton cheminement que tu as fait dans ta tête, au tableau
> **Élève** : *(Après avoir écrit l'égalité* $\frac{40}{5} = 8 \times 5$ *au tableau et l'avoir effacé)* Je ne suis pas capable.
>
> **Enseignant** : [...] tu peux faire 3 x 40 divisé par 8 x 1, ce qui va devenir ta réponse.

L'enseignant lui explique que pour multiplier un nombre avec une fraction, nous mettons le nombre sur 1. Par la suite, nous appliquons la règle de la multiplication de fractions. Cette proximité est qualifiée d'horizontale puisqu'elle utilise le même niveau de vocabulaire sans généralisation.

Les types de proximité	Les formes d'aide observées
Proximités horizontales	Faire des rappels qui se rapportent au contexte de la situation et qui nécessite l'utilisation des fractions pour résoudre le problème;
	Donner une explication concernant le choix de la fraction à utiliser pour la synthèse d'une mole d'ammoniac $NH_{3\,(g)}$ à partir des éléments qui le composent;
	Rappeler la définition de la concentration et le contexte dans lequel est utilisée;
	Donner une façon de faire pour effectuer l'opération $\frac{3}{8}\, de\ 40$;
Proximités descendantes	Guider l'élève dans son raisonnement;
Proximités ascendantes	

Tableau 3 : *Classification des formes d'aide observées selon le type de proximité observé*

6.3 Les effets du contrat didactique

Il arrive parfois que les incidents didactiques soient provoqués par les interventions de l'enseignant. Dans le cadre de cette recherche, nous avons relevé trois effets de contrat que nous exposons dans la section qui suit.

1.1.1 Le paradoxe du comédien

Nous avons observé qu'à certains moments, l'enseignant pose des questions et apporte lui-même les réponses attendues. Il prive ainsi l'élève de la possibilité d'agir sur le savoir attendu.

[1] $c = \frac{n}{v} \rightarrow concentration = \frac{nombre\ de\ moles}{volume\ de\ la\ solution}$

$c = \frac{m}{v} = \frac{masse}{volume} \rightarrow concentration = \frac{quantité\ soluté}{quantité\ de\ solution}$

Enseignant : Et le 2/3 de quoi? Le 2/3 de... 134,4. Donc, le 2/3 de 134,4, ce serait quoi le calcul mathématique que vous allez faire pour trouver le 2/3?
Élève : Je divise par 3...
Enseignant : On divise par 3 puis on multiplie par 2, ce qui va vous donner la masse restante que vous pourrez transformer par la suite en mol en divisant par la masse molaire.

6.3.1 L'effet d'une attente incomprise

Nous avons observé l'effet d'une attente incomprise du contrat didactique sur les interventions de l'enseignant, qui s'attend à ce que ses élèves utilisent les fractions dans la résolution des exercices. Pour répondre à la question « Écrivez l'équation qui correspond à la synthèse d'une mole d'ammoniac $NH_{3\,(g)}$ à partir de ses éléments » certains élèves ont multiplié l'équation par 2 pour éliminer la fraction $\frac{3}{2}$ et éviter ainsi de travailler avec les nombres fractionnaires. Cela pourrait démontrer que ces derniers sont mal à l'aise avec les fractions. Or, l'enseignant s'attendait à ce que les élèves utilisent la fraction $\frac{3}{2}$ dans l'équation pour avoir la synthèse d'une mole de NH_3.

Enseignant: Bien sûr, il y a eu des fractions d'impliquées. Quelques-uns parmi vous ont multiplié par 2 ici pour éliminer le problème des fractions. Mais n'oubliez pas, la question était bel et bien : la synthèse d'une mole de NH_3. C'est pour ça que ça nous obligeait à donner des fractions.

6.3.2 L'effet Topaze

Nous avons constaté que l'enseignant a tendance à indiquer le raisonnement proportionnel à utiliser pour résoudre l'exercice. L'enseignant repère les données pertinentes du problème pour établir la proportion afin que l'élève puisse l'utiliser pour faire le calcul et résoudre l'exercice.

Enseignant : […] Donc, dans ta proportion tu peux maintenant écrire : ½ mol de NO_2 va produire 46,01 grammes de NO_2. Tu veux en produire 60 grammes de NO_2. Combien de moles de O_2 tu vas avoir besoin? Qu'est-ce que tu vas faire comme calcul?
Élève : ½ x 60 divisé par 46,01.
Enseignant : ½ x 60 ça donne combien?
Élève : 30.
Enseignant : Bien. Si tu divises ça par 46,01 ça va te donner ton nombre de mol. Et tu arrives à combien?
Élève : 0,65.

7. DISCUSSION

7.1 Les incidents didactiques

L'analyse des interactions de l'enseignant avec les élèves nous a permis d'identifier trois incidents didactiques de nature conceptuelle. Cela montre que les fractions et les proportions sont en voie de construction (Douady, 1984). Il est intéressant de noter que les exercices réalisés en classe constituaient des phases de réinvestissement pour consolider les concepts de fraction et de proportion et favorisaient en quelque sorte une généralisation constructive (Sarrazy, 2005). Comme les fractions et les proportions sont présumés être institutionnalisés au premier cycle du secondaire, notre expérimentation aurait pu être un levier pour contribuer à construire de nouveau ces concepts. Les exercices de notre expérimentation permettaient d'établir la liaison entre les connaissances construites en situation et le savoir institutionnalisé. Or, nous avons constaté par les erreurs que les élèves n'arrivent pas à mobiliser leurs connaissances dans la réalisation des tâches.

7.2 Les aides apportées selon le type de proximité

Rappelons que, dans nos analyses, la nature des interventions de l'enseignant pour remédier aux erreurs des élèves, sont caractérisées par des formes particulières de proximités (Bridoux et al., 2015). Ces dernières sont majoritairement horizontales et touchent la structuration et la réalisation du travail demandé, attestant ainsi un maintien d'une relation sociale entre l'enseignant et l'élève. Elles sont accès sur le discours contextualisé et nourrissent souvent des interactions limitées et de faibles « portées » (Bridoux et al., 2015). Les interventions de l'enseignant quand il dénote des erreurs oriente l'élève vers l'application des procédures et présente cette alternative comme une solution gagnante (Benrherbal, 2021).

7.3 Les effets de contrat

Notre analyse a révélé trois effets du contrat didactique qui ont contribué à maintenir le fonctionnement du contrat didactique : l'effet Topaze, l'effet paradoxe du comédien et l'effet de l'attente incomprise. La tendance de maintenir le contrat didactique pourrait être expliquée, selon nos observations, par la convergence des scénarios (Roditi, 2003, p. 3) établis par l'enseignant. En effet, par des effets du contrat didactique, l'enseignants semble faciliter la tâche aux élèves et écarter toutes interventions qui risquent de susciter des questions qu'il ne souhaite pas aborder pour ne pas dévier de l'itinéraire prévu pour le cours. Par conséquent, l'enseignement semble se concentrer davantage sur les procédures formelles permettant de donner un sentiment de progrès dans l'apprentissage et d'assurer un climat favorable au fonctionnement de la classe. Dans ces conditions, l'enseignement se centre sur un apprentissage de procédures et d'algorithmes plus ou moins bien mémorisés, mais qui éloigne d'autant les élèves de ce qui pourrait faire sens pour eux (Benrherbal, 2021).

8. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons décrit et analysé les interactions entre un enseignant et ses élèves à propos des fractions et des proportions lors de situations de calcul stœchiométrique. Un constat ressorte de notre analyse. Les incidents didactiques que nous avons relevés sont pour la plupart liés à des erreurs générées par une utilisation non adéquate de données fractionnaires lors du calcul stœchiométrique. Les connaissances des élèves en lien avec les fractions et les proportions ont donc une influence sur le traitement des situations de calcul stœchiométrique.

Enfin, mobiliser les fractions dans les différentes situations pourrait exiger une conception plus globale qu'une conception locale liée à une institutionnalisation inachevée du savoir : « c'est le problème de l'institutionnalisation du savoir, car le savoir doit être extrait du contexte dans lequel il est apparu pour devenir autonome, négociable avec d'autres. L'institutionnalisation transforme une expérience en un savoir exportable » (Brousseau, 1984). Cette construction locale des savoirs va à l'encontre d'une construction de savoirs mobilisables dans les tâches nouvelles. Cela a sans doute un impact sur les apprentissages des savoirs en jeu lors de l'enseignement de la stœchiométrie en chimie.

BIBLIOGRAPHIE

ALDON, G. (2011). *Interactions didactiques dans la classe de mathématiques en environnement numérique: construction et mise à l'épreuve d'un cadre d'analyse exploitant la notion d'incident* (Thèse doctorale, Université Claude Bernard-Lyon I).

BENRHERBAL, A. (2021). *Comment les situations faisant intervenir les fractions et les proportions en mathématique et en sciences pourront-elles influencer l'apprentissage et l'enseignement de ces disciplines?* Thèse de doctorat. Université Laval, Canada.

BLOUIN, P. (1993). Enseignement de la notion de fraction à des élèves de 1ière secondaire en difficulté d'apprentissage. (Thèse de doctorat). Université de Montréal.

BRIDOUX, S., CHAPPET-PARIÈS, M., GRENIER-BOLEY, N., HACHE, C. et ROBERT, A. (2015). *Les Moments d'exposition des Connaissances en mathématiques (secondaire et début de l'université)*. Paris: IREM de Paris. Repéré à https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02111575

BROUSSEAU, G. (1983). Obstacles épistémologiques en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(2), 165-198.

BROUSSEAU, G. (1984). Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. *Actes de la 3e école d'été de didactique des mathématiques*.

BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(9.3), 309-336.

DESJARDINS, M., et HÉTU, J. C. (1974). *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions: Par Michel Desjardins et Jean-Claude Hétu*. Montréal : Presses de l'Université du Québec.

DOUADY, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire* (Doctoral dissertation, Université paris VII).

GABRIEL, F. C., COCHÉ, F., SZUCS, D., CARETTE, V., REY, B., ET CONTENT, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. Frontiers in psychology, 4, 715.

KIEREN. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. *Recent research on number learning*, 125-149.

KIEREN. (1988). Personal knowledge of rational numbers. Dans J. Hierbert et M. Behr *(Éd.) Numbers concepts and operation in the middle grade* (p. 1-18). Hillsdale, NJ Erlbaum: Reston, FA : National Council of Teachers of Mathematics.

MEES (2020). PROGRAMME DE FORMATION DE L'ÉCOLE QUÉBÉCOISE : Progression des apprentissages Chimie, 5e année du secondaire. Repéré à : http://edut3-prod.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/PDA_2021-2022-PFEQ_Chimie_Secondaire5.pdf

MEQ (2001). *Programme de formation de l'école québécoise*. Québec: Ministère de l'Éducation du Québec.

ROBERT, A. et VANDEBROUCK, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34, 239-285.

RODITI, E. (2003). Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, *23*(2), 183-216.

RODITI, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris: L'Harmattan.

ROGALSKI, J. (2000). Y a-t-il un pilote dans la classe? Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant. ARDM, *Actes du Séminaire National de Didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

SARRAZY, B. (2005). Questions à la théorie anthropologique de la didactique du point de vue de la théorie des situations et de l'anthropologie wittgensteinienne. *Actes du Premier Congrès International sur la Théorie Anthropologique du Didactique. Société, École et Mathématiques: Apports de la TAD.*

THOMAS, D. R. (2006). A general inductive approach for analyzing qualitative evaluation data. *American journal of evaluation*, *27*(2), 237-246.

VAN HOOF, J., JANSSEN, R., VERSCHAFFEL, L., ET VAN DOOREN, W. (2015). Inhibiting natural knowledge in fourth graders: towards a comprehensive test instrument. ZDM Mathematics Education, 47(5), 849-857.

Introduire le logiciel de la géométrie dynamique pour améliorer l'apprentissage des fonctions numériques au lycée

Abdoul Massalabi Nouhou
Moussa Mohamed Sagayar
Université Abdou Moumouni (Niger)

RÉSUMÉ

Cette contribution se situe dans le cadre de l'étude des usages d'un environnement de logiciel dynamique en enseignement – apprentissage des fonctions numériques au lycée. Nous nous intéressons particulièrement à amélioration de l'apprentissage des fonctions numériques au lycée à travers le logiciel de la géométrie dynamique GeoGebra. Le cadre théorique s'articule autour des registres de représentations sémiotiques et de la théorie de la médiation sémiotique. L'expérience a portée sur une classe ordinaire de mathématiques de la terminale scientifique (18-19 ans) d'un établissement public. Deux séances sur l'étude de fonctions numériques à variable réelle ont été observées et les stratégies de résolutions des problèmes ont été analysées. Les résultats nous ont permis de constater au cours de la résolution du problème 1 que la plupart des élèves font facilement l'introduction du registre algébrique mais se trouvent déstabilisés lorsqu'il s'agit d'utiliser le registre graphique concerné. Malgré l'introduction de GeoGebra les élèves ont eu du mal à mobiliser les différents registres de représentation de la fonction. Les résultats nous ont permis de constater au cours de la résolution du problème 2 que les élèves arrivent avec une certaine facilité à bien gérer l'introduction et l'utilisation du registre algébrique mais aussi à utiliser le registre graphique et celui numérique du tableau des valeurs. L'introduction de GeoGebra comme outil de médiations a permis aux élèves de s'investir un peu plus que d'habitude dans cette deuxième séance, en assumant directement la responsabilité d'effectuer les tâches mathématiques inhabituelles pour introduire ou utiliser les registres de représentation sémiotique des fonctions numériques.

Mots clé : Mathématiques et TICE, GeoGebra, fonction numérique, registres de représentation, apprentissage.

1. INTRODUCTION

Les fonctions numériques occupent une position centrale dans la plupart des secteurs d'activités. Dans le contexte scolaire, la maîtrise des fonctions numériques est décisive pour effectuer des études supérieures dans le domaine des mathématiques, des sciences et techniques. Au Niger, les fonctions sont introduites dès le collège tout d'abord avec l'introduction des fonctions affines en troisième c'est-à-dire la dernière année du 1er cycle du secondaire (15-16 ans). Puis l'étude des fonctions élémentaires (fonctions affines par intervalles, fonctions carrée, fonctions inverses, fonctions racines carrées, fonctions cubiques, fonctions cosinus et fonctions sinus) commence dès la seconde c'est-à-dire la 1ère année du lycée (16-17) à partir de l'étude de leurs propriétés générales (le domaine de définition, la sens de variation et la représentation graphique). C'est à partir de la première c'est-à-dire 2ème année du lycée (17-18), que les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont introduite mais aussi les outils théoriques classiques de l'analyse (dérivée, limite, continuité) sont introduits dans l'étude des fonctions de références. Les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmes sont introduites en terminale c'est-à-dire 3ème année du lycée (18-19). Parallèlement les élèves de la terminale consolident l'utilisation des outils théoriques de l'analyse par l'étude des fonctions de références (fonctions polynômes, fonctions homographiques, fonctions exponentielle et fonctions logarithme).

Le choix des fonctions numériques dans cette étude est motivé d'une part par le niveau non satisfaisant des élèves nigériens en mathématiques et d'autre part le souci de dynamiser l'enseignement-apprentissage des mathématiques qui semblent limiter les fonctions des élèves au statut d'exécutants de calculs ou de techniques sans opportunités de construction de sens.

2. PROBLÉMATIQUE

2.1 La notion de fonction et son apprentissage au lycée

Le terme de « fonction » a été introduit à la fin du XVIIème siècle par Leibniz pour désigner des quantités qui sont dépendant d'une variable. Mais les premières utilisations de la notion fonction remontent à l'antiquité sous la forme de correspondances de deux grandeurs. Les Babyloniens (vers 1800 av. J.C.) utilisaient la correspondance entre deux gradeurs pour déterminer les jours (la table de calcul du carré d'un nombre ou tables astronomiques). Les mathématiciens grecs de l'époque antique comme Hipparque de Nicée (vers 190–120 av. J.C.) utilisait des tables des cordes pour calculer des grandeurs et distances du soleil et de la lune. Les Pythagoriciens utilisaient le tableau de valeurs pour rendre compte de la dépendance entre deux grandeurs enfin de modéliser les phénomènes naturels ou de schématiser des lieux géométriques. Ces périodes marquent l'introduction de la représentation des tableaux de correspondances d'une fonction. Mais, il a fallu au moyen âge pour obtenir une véritable émergence de la notion de la fonction avec l'introduction de l'« algèbre » et de l'expression algébrique de la fonction sous forme des phrases Al-Khwarizmi (780–850). L'introduction de l'algèbre moderne par Viète (1540–1603) et de la géométrie analytique par Descartes (1596–1650) ont permis d'introduire l'expression analytique de la fonction et la représentation et graphique mais surtout la mise en corrélation des différents modes de représentations d'une fonction: courbe, tableau de correspondance, formule algébrique et expression analytique.
Pour Duval (1993) la compréhension de la fonction implique une articulation cohérente des différentes registres sémiotiques qui entre en jeu dans la résolution du problème.
Pour Duval (1993) la fonction est d'abord les expressions algébrique et graphique, il explique que : « la lecture des représentations graphiques suppose la perception des variations correspondantes qui suppose une attitude contraire à la pratique appellative associant un point à un couple de nombres »
Dans le contexte scolaire nigérien, la notion de fonction est introduite dès la fin du premier cycle du secondaire pour être consolidée au niveau du lycée. Les fonctions sont introduites dans une approche générale avec des propriétés générales des fonctions élémentaires, l'introduction des notions des limites, continuités et des dérivées des fonctions à partir de l'étude des fonctions usuelles apparaissant comme outil de résolution de problème. A la fin du cycle (en terminale) les notions sont approfondies à travers l'étude des fonctions homographiques, des fonctions trigonométriques, des fonctions exponentielles et des fonctions logarithmes. Les programmes officiels de l'enseignement de mathématiques au lycée recommandent la promotion de la démarche de résolution de problèmes à travers les expressions algébriques et graphiques d'une fonction. A ces deux registres, il s'ajoute le registre de la langue d'enseignement (le français). Artigue souligne que :

> La recherche a bien mis en évidence les difficultés que beaucoup d'élèves éprouvent à détacher l'objet fonction de ses représentations, notamment ses représentations algébriques qui sont les plus utilisées, ainsi qu'à jouer avec flexibilité des différents

registres, pour choisir le plus approprié à la résolution de telle ou telle tâche. (Artigue, 2009, p. 24)

Pour la résolution des problèmes des fonctions numériques de nombreux registres sont susceptibles d'intervenir (Coppé et al., 2007, p. 160). Selon Artigue (2009), on distingue habituellement 6 registres pour la notion de fonction : le registre de la langue naturelle, le registre numérique des tables de valeurs, le registre algébrique des formules, le registre graphique des courbes, le registre graphique des tableaux de variation et le registre symbolique intrinsèque.
A ceci s'ajoute les difficultés des élèves à résoudre des problèmes sur les fonctions. Les élèves ont souvent l'habitude d'associer la fonction numérique à son expression algébrique. Cela peut s'expliquer par la prédominance du registre algébrique dans l'approche d'enseignement des fonctions (Dufour, 2011). Pour Fernando (1998) les difficultés des élèves sont dues aux obstacles extrinsèques de type didactique (les approches d'enseignement des fonctions au lycée) et aux obstacles intrinsèques au sens où les élèves éprouvent des difficultés à mobiliser de manière cohérente les différents registres de représentation des fonctions.

2.2 GeoGebra, représentation naturelle des registres

GeoGebra est un logiciel de la géométrie dynamique créé par Markus Hohenwarter pour améliorer le processus d'apprentissage des mathématiques. L'acronyme GeoGebra dérive de deux mots : ***Geo*** de **Géo**métrie et ***Gebra*** d'Al**gèbre**. GeoGebra est un une application interactive de géométrie, d'algèbre, de statistiques et de calcul formel (voir figure 1), destinée à l'apprentissage et à l'enseignement des mathématiques et des sciences de l'école primaire à l'université. Ce logiciel de la géométrie dynamique est libre d'accès, ce qui facilite sont utilisation dans les établissements publics des pays en développement. Il peut être utilisé dans plusieurs langues notamment le français. Il est disponible sur plusieurs plateformes et sites Web. GeoGebra est utilisé dans d'autres disciplines éducatives. GeoGebra peut être installé et utilisé sur les ordinateurs, les tablettes numériques et des téléphones androïde.

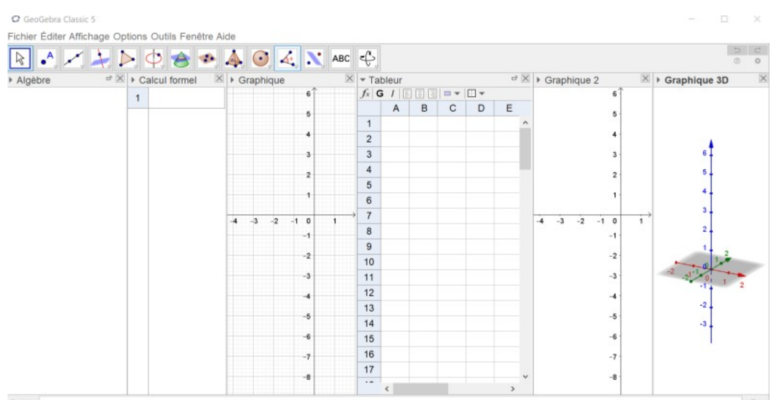


Figure 1. *la barre de saisie, les fenêtres et la barre outils de GeoGebra*

Pour ce qui est de l'enseignement et de l'apprentissage des fonctions, GeoGebra peut permettre à l'utilisateur de travailler sur plusieurs fenêtres (d'algébrique, du graphique, du calcul formel, la feuille du tableur). Il peut être utilisé comme environnement d'exploration active de la fonction numérique en tant qu'objet mathématique (Freiman et al., 2009, p. 39). La barre de saisie est utilisée pour écrire des expressions algébriques et symboliques de l'objet fonction. La fenêtre algébrique permet d'afficher les écritures algébriques. La fenêtre graphique permet simultanément d'afficher la représentation graphique de la fonction (la courbe et le graphe) une fois que la saisie de la fonction numérique est correcte. La fenêtre de calcul formel permet de saisir des expressions symboliques de la fonction et d'effectuer les calculs usuels de l'analyse fonctionnelle (résolution d'une équation ou d'une inéquation, calcul des bornes, calcul de la dérivée, calcul de l'intégrale, etc.). La fenêtre de feuille de calcul du tableur permet de saisir les antécédents, de calculer les images directes ou des images indirectes, de déterminer les coordonnées d'un point et établir une table de correspondance$(x;\ y)$. L'introduction du logiciel de la géométrie dynamique GeoGebra peut offrir aux élèves la possibilité de mobiliser de manière cohérente plusieurs registres de représentations sémiotiques de la fonction mathématique au cours du processus d'apprentissage.

Partant de ces différents constats la présente recherche tentera d'étudier l'introduction d'un logiciel de la géométrie dynamique et du calcul formel pour améliorer le processus de l'apprentissage des fonctions numériques au lycée. Nous chercherons à répondre à la question de recherche suivante : L'introduction du logiciel de la géométrie dynamique GeoGebra impose – t elle – aux élèves du lycée de revoir leurs stratégies de résolutions de problèmes sur les fonctions numériques?

3. CADRE THÉORIQUE

3.1 Approche des registres de représentation sémiotique

La sémiotique vient du mot grec *sémiosis* qui signifie action de marquer d'un signe. Elle s'intéresse donc aux relations des signes entre eux (syntaxe), aux relations entre signes et signifiés (sémantique) et à l'utilisation des signes (pragmatique). La sémiotique permet l'étude des systèmes de signes. Duval (1993) définit les registres de représentations sémiotiques comme des modes de représentations des objets mathématiques. La conceptualisation de la fonction par les élèves passe par trois stades : la formation des représentations de la fonction dans différents registres, le traitement de ces représentations dans chaque registre et la conversion entre ces représentations d'un registre à un autre (Duval, 2002).

Les fonctions usuelles peuvent ainsi acquérir dans ce processus le statut d'objet puis peu à peu d'objet abstrait ou concept de fonction (Anderson, 2015). Selon Coppé, Dorier et Yavuz (2007), il y a 6 principaux registres susceptibles d'intervenir en apprentissage des fonctions numériques: le registre de la langue naturelle (Rl), le registre algébrique des formules (Ra), le registre graphique de courbes (Rg), le registre numérique des tableaux de valeurs (Rn), et le registre graphique des tableaux de variation (Rtv) et le registre symbolique intrinsèque (Rs). (Bloch, 2005) a relevé que l'apprentissage de la notion de fonction au lycée nécessite que les élèves se familiarisent avec les registres de représentations de la fonction. Les connaissances sur plusieurs registres facilitent les activités de traitements au sein des registres et les activités de conversions des registres par les élèves. Pour Duval (1993) les conversions de registres de représentation de l'objet fonction permettent d'enrichir les représentations mentales du concept et sa conceptualisation c'est-à-dire la compréhension de la notion chez l'élève.

3.2 Théorie de médiation sémiotique

La théorie de médiation sémiotique (TMS) est introduite par Bussi & Mariotti (2008). Elle vise la transposition du concept de la médiation sémiotique dans le domaine de la didactique des mathématiques. La théorie de médiation sémiotique offre un cadre pour étudier l'activité mathématique comme une activité médiatisée. La fonction de médiation est exercée par l'artefact (outil) et les signes (Falcade, 2006). Le processus de construction de connaissances mathématiques est alors considéré comme une conséquence d'une activité mathématique instrumentée par différents types de signes (mathématiques, symboliques, langagière, gestuels, technique etc.). Dans cette perspective, le processus de construction des connaissances est double en mettant en évidence *les liens artefact/tâche et artefact/connaissance mathématique.* L'artefact permet d'accomplir des tâches spécifiques favorisant l'émergence des significations personnelles à travers la production des signes liées à l'activité avec l'artefact. L'objectif étant celui d'apprendre, alors l'utilisation de l'artefact est reliée à une connaissance mathématique spécifique.

Certains éléments de l'approche instrumentale en didactiques des mathématiques (Rabardel, 1999), ont été adaptés par la théorie de la médiation sémiotique notamment la différence entre *artefact* et *instrument* ou la notion de *genèse instrumentale.* L'artefact est un objet matériel ou symbolique en soi alors que l'instrument est une entité mixte composé de l'artefact et de ses schèmes d'utilisation. Le processus de la genèse instrumentale permet à l'utilisateur (l'élève) de transformation de l'artefact en instrument. GeoGebra dans les mains des élèves, son usage peut influencer le processus de construction de connaissances sur les registres de représentations sémiotiques des fonctions numériques**.**

4. ÉLÉMENTS MÉTHODOLOGIQUES

Le choix méthodologique de cette recherche porte sur une recherche expérimentale dans un établissement secondaire du Niger.

Dans un premier temps, nous avons pris contact avec l'administration scolaire de l'établissement public dans lequel nous volons mener cette recherche. Nous nous sommes ensuite concertés avec les enseignants des mathématiques à propos des difficultés réelles des élèves du lycée pour l'apprentissage des fonctions numériques au cours du cycle du lycée et sur leur rapport au TIC en enseignement – apprentissage de mathématiques. Les enseignants de mathématiques ne sont pas experts en technopédagogie mais ils tous une expérience sur utilisation des logiciels pour l'enseignement des mathématiques.

Dans un deuxième temps, Ces enseignants de mathématiques se sont réunis dans leur unité pédagogique (UP) pour proposer deux situations problèmes en tenant compte des difficultés des élèves sur les fonctions numériques dont les résolutions nécessitent la mobilisation de plusieurs registres de représentations sémiotiques. L'enseignant de la terminale scientifique a enfin adapté le contenu en fonction des conditions d'enseignement – apprentissage de sa classe de mathématiques.

Une classe de mathématiques de la terminale scientifique de 21 élèves (18 – 19 ans) a été observée au cours de notre expérimentation. Pour les observations des deux séances, nous avons privilégié une approche naturaliste pour observer les pratiques de l'enseignant et les activités des élèves dans une classe ordinaire de mathématiques (Caliskan-Dedeoglu, 2006). Le logiciel GeoGebra a été intégré dans des tablettes numériques. Avant de commencer le cours, l'enseignant reparti les élèves de sa classe en plusieurs groupes et chaque groupe de travail est doté d'une tablette.
Notre démarche se veut constructiviste et intégrant le logiciel de la géométrie dynamique GeoGebra dans le processus d'apprentissage des fonctions numériques et pour permettre aux élèves de mobiliser les différents registres de représentation sémiotique des fonctions au cours de résolution des problèmes.

5. RÉSULTATS ET DISCUSSION

La situation problème 1 a été proposée pour étudier une fonction polynôme à partir de sa représentation graphique.

On considère la fonction *f* définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$

1) Représenter à l'aide de GeoGebra la courbe représentative C_f de f sur un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ unité 1 cm

2) Utiliser cette représentation graphiquement pour :
   a) Préciser la valeur de la dérivée *f'* de la fonction *f* en $x = -1$?
   b) Dresser le tableau de variation de *f*
   c) Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 4$
   d) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 0$

3) Soit (T): $y = -(x + 2)$ l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse -2. Représenter (T) dans le même repère puis déterminer la position de C_f par rapport à (T).

Figure 2*. Situation problème 1*

Pour répondre à la question 1), les élèves sont appelés à mobiliser le registre algébrique des formules. Les stratégies possibles sont :

- La stratégie algébrique des formules qui consiste à déterminer l'expression algébrique de la fonction f adaptée à l'outil de saisi de GeoGebra (traitement algébrique). Écrire l'expression algorithmique adaptée à la barre de saisie, $f(x) = (1/2)x\text{^}2 + x$ de la fonction polynôme $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ pour obtenir les représentations algébrique et graphique de la fonction sur l'interface (conversion de l'algébrique vers le graphique) (voir la figure 2).

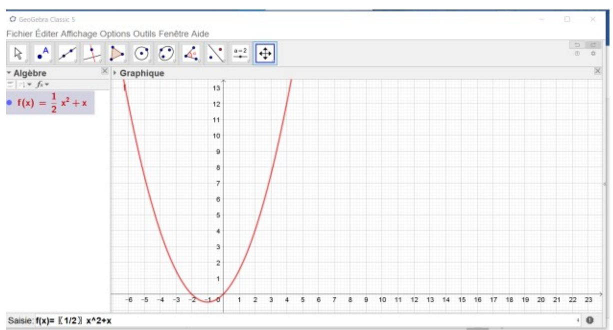


Figure 3. *Saisie de la fonction polynôme et ses représentations sur l'interface*

- La stratégie algébrique des formules qui consiste à partir d'une expression algébrique de la fonction f, tracer la courbe point par point sur papier/cayon.

Les élèves sont parvenus à mobiliser le registre algébrique des formules sur l'interface de GeoGebra.

Pour répondre à la question 2) plus précisément au niveau des quatre sous questions, les élèves sont appelés à mobiliser le registre algébrique des formules et le registre graphique de la courbe. Les stratégies possibles sont :

- Les stratégies graphiques des courbes consistent à partir d'une courbe de la fonction polynôme, pour identifier que le minimum de f est atteint pour la valeur de $x = -1$ donc $f'(-1) = 0$. A partir de la courbe de la fonction polynôme, établir un tableau de variations. (conversion). A partir de la courbe de la fonction polynôme, trouver les solutions des équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 4$. A partir de la courbe de la fonction polynôme, trouver les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$.
- Les stratégies algébriques des formules qui consistent à partir de l'expression algébrique de la fonction polynôme, déterminer la dérivée première de la fonction (conversion) puis calculer $f'(-1)$ (traitement). A partir de l'expression algébrique de la fonction polynôme, établir un

tableau de variations. (conversion). Résoudre algébriquement les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 4$ (traitement). Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \leq 0$ (traitement).

Les stratégies mobilisées par les élèves en termes des registres de représentation sémiotiques de la fonction polynôme au cours de la résolution de la question a été la stratégie algébrique des formules.

Pour répondre à la question 3), les élèves sont appelés à mobiliser le registre algébrique des formules, le registre graphique des courbes ou le registre graphique des tableaux des variations. Les stratégies possibles sont :

- La stratégie algébrique des formules classique qui consiste à calculer algébriquement le polynôme $f(x) - y$ (traitement). A partir de l'expression algébrique de $f(x) - y$, établir un tableau de signe (conversion) puis interpréter algébriquement les positions relatives de courbe de f par rapport à la tangente (T) (conversion).

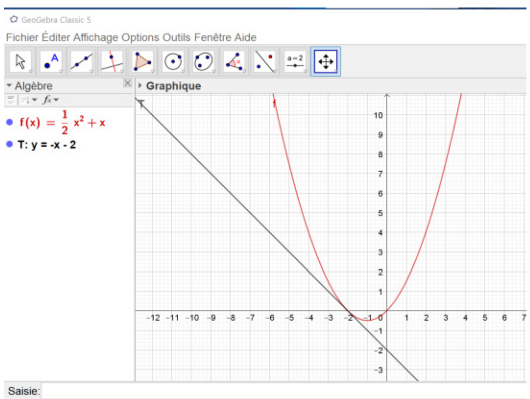


Figure 4. *Tracé de la tangente (T) à l'aide de GeoGebra*

- La stratégie algébrique des formules classique qui consiste à calculer algébriquement le polynôme $f(x) - y$ (traitement). A partir de l'expression algébrique de $f(x) - y$, établir un tableau de signe (conversion) puis interpréter graphiquement les positions relatives de courbe de f par rapport à la tangente (T) (conversion).
- La stratégie algébrique des formules à l'aide des outils GeoGebra consiste à déterminer l'expression algébrique de la tangente (T) adaptée à l'outil de saisi de GeoGebra (traitement algébrique) puis obtenir le tracé sa courbe représentative (conversion de l'algébrique vers le graphique). Ensuite, interpréter algébriquement les positions relatives de la courbe de f par rapport à la tangente (T) (traitement).
- La stratégie algébrique des formules à l'aide des outils GeoGebra consiste à déterminer l'expression algébrique de la tangente (T) adaptée à l'outil de saisi de GeoGebra (traitement algébrique) puis obtenir le tracé sa courbe représentative (conversion de l'algébrique vers le graphique). Ensuite, interpréter graphiquement les positions relatives de la courbe de f par rapport à la tangente (T) (traitement).

La stratégie mobilisée par les élèves en termes des registres de représentation sémiotiques de la fonction polynôme au cours de la résolution de la question est le registre algébrique des formules pour calculer la limite à l'infinie de (*f(x)* - *y*) et observer que le résultat a été égal à zéro. Toutes fois, ils se sont servis de l'interface pour tracer l'asymptote oblique et vérifier le résultat grâce à la commande du calcul formel.

Il ressort de ces différents résultats des stratégies mobilisées par les élèves en termes des registres de représentation sémiotiques de la fonction polynôme au cours de la résolution du problème 1 que ces derniers ont privilégié les stratégies algébriques par rapport aux stratégies graphiques par rapport au registre graphique. Les observations des activités ont montré que les élèves arrivent avec facilité à introduire le registre algébrique, à faire des traitements algébriques adapter à l'aide de l'outil de saisi et à faire des calculs algébriques simples. L'utilisation de l'outil graphique étaient rester basique malgré la présence des outils de visualisation et de construction qui existent dans l'environnement GeoGebra. Cela témoigne des difficultés à mobiliser les stratégies graphiques au cours des résolutions des tâches mathématiques avec GeoGebra. Pour interpréter les positions relatives de la courbe et de la tangente, les élèves ont mobilisé la stratégie algébrique. Nous avons observé que les élèves n'ont pas utiliser l'outil de calcul formel de GeoGebra et l'outil tableur. Malgré l'introduction de GeoGebra, avec un potentiel d'apprentissage des fonctions numériques mobilisant plusieurs registres, les élèves ont eu du mal à détacher la fonction avec la représentation algébrique (Artigue, 2009). Ils n'ont pas pu mobiliser tout le potentiel didactique de cet outil notamment celui lié à l'apprentissage des fonctions en mobilisant les différents registres de représentation sémiotiques.

Mais en dépit de cela cette première expérience à montrer les élèves de notre expérimentation peuvent transformer GeoGebra en instrument d'apprentissage des fonctions numériques. Il peut à cet effet influencer le processus de construction de connaissances de ses élèves sur les registres de représentations sémiotiques des fonctions numériques.

La situation problème 2 a été proposée pour étudier une fonction homographique et sa représentation graphique.

Soit *f* la fonction définie par : $f(x) = 2x + 3 + \frac{4}{x-5}$

1) Donner le domaine de définition de la fonction *f*
2) Etudier la variation de la fonction *f* (sens de variation et tableau de variation)
3) Montrer que $y = 2x + 3$ est une asymptote oblique a la courbe C_f à ∞
4) Tracer la courbe de la fonction *f* et ces asymptotes dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
5) Montrer que $I(5; 13)$ est un centre de symétrie à C_f
6) Résoudre l'équation $f(x) = 0$, graphiquement et par calcul.
7) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$, graphiquement et par calcul

***Figure 5**. Situation problème 2*

Pour répondre à la question 1), les élèves sont appelés à mobiliser le registre algébrique des formules. Les stratégies possibles sont :

- La stratégie algébrique des formules qui consiste à partir de l'expression algébrique de la fonction $f(x) = 2x + 3 + \frac{4}{x-5}$, écrire l'expression algorithmique adaptée à la barre de saisie de GeoGebra $f(x) = 2x + 3 + \frac{4}{x-5}$ pour obtenir les représentations algébriques et graphiques sur l'interface puis déterminer le domaine de définition de f (conversion du registre algébrique au registre).

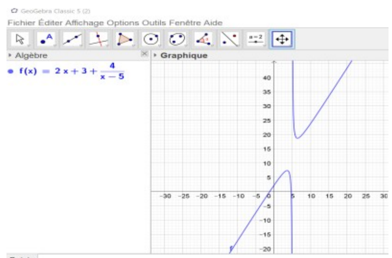


***Figure 6.** La représentation algébrique et graphique de la fonction homographique*

- La stratégie algébrique à l'aide de GeoGebra qui consiste à déterminer l'expression algébrique de la fonction f adaptée à l'outil de saisi de GeoGebra (traitement). Puis à partir d'une expression algébrique de la fonction f, tracer une courbe de f(conversion). Enfin, à partir de la courbe représentative de f, déterminer le domaine de définition de cette fonction.

Les élèves sont parvenus le registre algébrique des formules sur l'interface de GeoGebra pour représenter la fonction homographique. Mais, ils ont eu des difficultés à se servir des outils de GeoGebra pour observer, interpréter graphiquement la représentation graphique de la fonction f et déterminer le domaine de définition de cette fonction homographique. Ceci les a contraints à revenir et à utiliser la forme la stratégie algébrique classique pour déterminer le domaine de définition de la fonction *f*.

Pour répondre à la question 2), les élèves sont appelés à mobiliser le registre algébrique des formules ou le registre graphique des courbes. Les stratégies de résolution possibles sont :

- La stratégie algébrique des formules qui consiste à partir de l'expression algébrique de la fonction homographique, établir un tableau de variations. (conversion)
- La stratégie graphique des courbes qui consiste à partir de la courbe de la fonction homographique, établir un tableau de variations. (conversion).

La stratégie mobilisée par les élèves en termes des registres de représentation sémiotiques de la fonction homographique au cours de la résolution de la question a été la stratégie algébrique mais ils se sont toutefois servis de l'interface graphique pour observer les variations de la courbe et visualiser les coordonnées de points remarquables.

Pour répondre à la question 3), les élèves sont appelés à mobiliser le registre algébrique des formules, le registre graphique des courbes ou le registre graphique des tableaux des variations. Les stratégies possibles sont :

- La stratégie algébrique des formules qui consiste à déterminer l'expression algébrique de l'équation de la droite adaptée à l'outil de saisi de GeoGebra (traitement). Puis à partir de l'expression algébrique de l'équation de la droite, tracer cette droite courbe représentative (conversion de l'algébrique vers le graphique). Enfin étudier les tendances de la courbe et de droite lorsque x vers l'infini (traitement) puis interpréter le résultat (conversion)
- La stratégie algébrique des formules qui consiste à calculer algébriquement la limite à l'infini de $f(x) - y$ (traitement) puis interpréter le résultat (conversion).

La stratégie mobilisée par les élèves en termes des registres de représentation sémiotiques de la fonction homographique au cours de la résolution de la question est le registre algébrique des formules pour calculer la limite à l'infinie de (*f(x) - y*) et observer que le résultat a été égal à zéro. Toutes fois, ils se sont servis de l'interface pour tracer l'asymptote oblique et vérifier le résultat grâce à la commande du calcul formel.

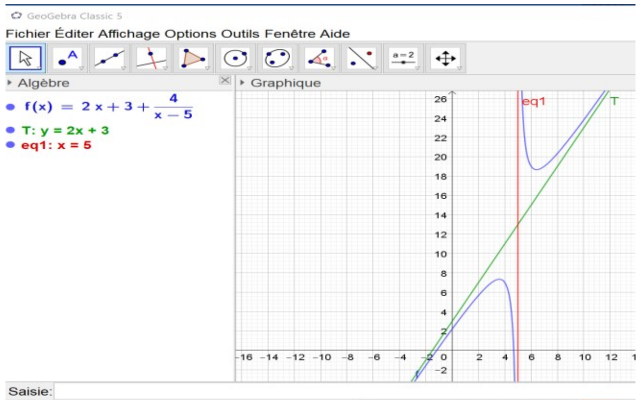


Figure 5. *Représentations algébrique et graphique de la fonction f et des asymptotes*

Pour répondre à la question 4), les élèves sont appelés à mobiliser le registre algébrique des formules, le registre graphique des courbes ou le registre graphique des tableaux des variations. Les stratégies possibles sont :

- La stratégie algébrique des formules qui consiste à déterminer les expressions algébriques de la fonction f et des équations des droites adaptées à l'outil de saisi de GeoGebra (traitement). A partir des expressions algébriques de la fonction, de l'asymptote oblique et de l'asymptote verticale, tracer la courbe représentative de la fonction et ses deux asymptotes (conversion de l'algébrique vers le graphique).
- La stratégie algébrique des formules qui consiste à partir des expressions algébriques de la fonction, de l'asymptote oblique et de l'asymptote verticale, tracer point par point la courbe et ses deux asymptotes.

Puisse qu'ils aient déjà tracé la courbe de la fonction *f* et l'asymptote oblique, les élèves ont choisi de mobiliser même stratégie algébrique des formules pour tracer l'asymptote verticale au $x = 5$ dans le processus de résolution de cette question.

Pour répondre à la question 5), les élèves sont appelés à mobiliser le registre algébrique des formules, le registre graphique des courbes ou le registre graphique des tableaux des variations. Les stratégies possibles sont :

- Stratégie graphique des courbes qui consiste à déterminer le point de concours des asymptotes (traitement) puis établir une conjoncture (conversion)
- La stratégie algébrique des formules qui consiste à partir des coordonnées du point $\mathrm{I}\ (a;\ b)$, déterminer $f(2a - x) + f(x) = 2b$ (traitement) puis en déduire que I est un centre de symétrie (conversion)

La stratégie mobilisée par les élèves en termes des registres de représentation sémiotiques de la fonction homographique au cours de la résolution de la question a été la stratégie algébrique des formules.

Pour répondre à la question 6), les élèves sont appelés à mobiliser le registre algébrique des formules, le registre graphique des courbes ou le registre graphique des tableaux des variations. Les stratégies possibles sont :

- La stratégie graphique des courbes qui consiste à partir de la courbe de la fonction polynôme, trouver les solutions des équations $f(x) = 0$.
- La stratégie algébrique des formules qui consiste à résoudre algébriquement les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 4$ (traitement)

La stratégie mobilisée par les élèves en termes des registres de représentation sémiotiques de la fonction homographique au cours de la résolution de la question a été la stratégie algébrique.

Pour répondre à la question 7), les élèves sont appelés à mobiliser le registre algébrique des formules, le registre graphique des courbes ou le registre graphique des tableaux des variations. Les stratégies possibles sont :

- La stratégie graphique des courbes qui consiste à partir de la courbe de la fonction polynôme, trouver les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$
- La stratégie algébrique des formules qui consiste à résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) > 0$ (traitement).

La stratégie mobilisée par les élèves en termes des registres de représentation sémiotiques de la fonction homographique au cours de la résolution de la question a été la stratégie algébrique.
Il ressort de ces différents résultats sur les stratégies possibles et les stratégies mobilisées par les élèves en termes des registres de représentation sémiotiques de la fonction homographique la prédominance chez les élèves pour la mobilisation des stratégies algébriques au cours du processus de résolution du problème par rapport aux stratégies graphiques des courbes et ceux du tableau de variations. Les observations des tâches réalisées lors de la résolution du problème ont montré que les élèves arrivent avec facilité à introduire le registre algébrique au cours des résolutions des tâches. Ils arrivent avec plus de facilité à identifier et à utiliser le registre graphique et le registre des tableaux de variations concernés.
L'introduction du logiciel de la géométrie dynamique GeoGebra à amener les élèves à à surmonter les difficultés de mobilisation de manière cohérente les registres concernés par la résolution du problème Fernando (1998) et à assumer directement la responsabilité d'effectuer les tâches mathématiques inhabituelles sur l'objet fonction (Bloch, 2005). Comme le souligne Duval (1993), des telles stratégies peuvent enrichir les représentations mentales de la notion de la fonction chez les élèves .

6. CONCLUSION ET PERSPECTIVE

Cette recherche porte sur l'introduction d'un logiciel de la géométrie dynamique GeoGebra pour améliorer le processus de l'apprentissage des fonctions numériques au lycée. Les premiers résultats ont montré que les élèves sont parvenus avec facilité à introduire le registre algébrique notamment à écrire l'expression algébrique algorithmique avec GeoGebra et à faire les calculs algébriques. En dépit de la présence du registre graphique à côté de celui algébrique, les élèves ont plus mobilisé le registre algébrique. Ce qui montre que malgré le potentiel de GeoGebra à faire mobiliser plusieurs registres, les élèves ont eu du mal à se détacher du registre algébrique au cours de la résolution du problème 1 (Artigue, 2009). Cependant, cette activité a permis aux élèves d'apporter une distinction entre les deux registres de représentation de cette fonction polynôme. Les deuxièmes résultats ont également montré que les élèves arrivent avec plus de facilités à mobiliser les registres algébrique et graphique pour résoudre le problème 2.
Ainsi la présence du registre graphique à côté du registre algébrique ainsi que d'autres registres dans l'environnement GeoGebra a imposé aux élèves de revoir leurs stratégies de résolution des problèmes des fonctions numériques au lycée. Une telle approche associant l'utilisation de l'outil informatique GeoGebra en lien avec l'apprentissage des mathématiques, les fonctions numériques à variables réelles au lycée, peut permettre aux élèves de surmonter les difficultés d'apprentissage de la fonction numérique (Fernando,1998) et aux enseignants de mathématiques de changer la prédominance du registre algébriques dans l'enseignement des fonctions (Dufour, 2011).

D'autres recherches peuvent conduite sur les notions importantes de l'analyse au lycée (limites, continuité, dérivabilité, primitives etc) en première et en terminales pour offrir des possibilités de surmontés des obstacles extrinsèques de type didactique et aux obstacles intrinsèques au sens où les élèves éprouvent des difficultés à mobiliser de manière cohérente les différents registres de représentation des fonctions. aux formateurs enseignants de mathématiques, aux futures enseignants, au enseignants et aux élèves des
La présente recherche a relevé les difficultés des élèves à utiliser tous les outils de GeoGebra indispensables à l'utilisation de plusieurs registres de représentation sémiotiques au cours du processus de résolution des problèmes des fonctions numériques. C'est pourquoi la question de maîtrise des fonctionnalités des outils GeoGebra par les élèves lycée et son effet sur la mobilisation les stratégies possibles semblent également importantes à creuser dans le cadre de cette recherche. Il reste donc un travail à faire.

BIBLIOGRAPHIE

ANDERSON, J. R. (2015). *Cognitive Psychology and Its Implications; Eighth Edition.* Worth Publishers. http://125.234.102.146:8080/dspace/handle/DNULIB_52011/7662

ARTIGUE, M. (2009). L'enseignement des fonctions à la transition lycée–université. *Actes du XV e Colloque CORFEM*, *2008*, 25-44.

BLOCH, I. (2005). Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycee. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *7*(1).

BUSSI, M. B., et MARIOTTI, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom : Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education*, *746*.

CALISKAN-DEDEOGLU, N. (2006). *Usages de la géométrie dynamique par des enseignants de collège. Des potentialités à la mise en oeuvre : Quelles motivations, quelles pratiques?* [PhD Thesis]. Université Paris-Diderot-Paris VII.

COPPE, S., DORIER, J.-L., & YAVUZ, I. (2007). De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde. *RDM*, *27*(2), 151-186.

DUFOUR, S. (2011). *L'utilisation des représentations par deux enseignantes du collégial pour l'introduction de la dérivée*.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*, 37-65.

DUVAL, R. (2002). Comment décrire et analyser l'activité mathématique? Cadres et registres. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, *7*, 83-105.

FALCADE, R. (2006). *Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives dans des séquences d'enseignement qui utilisent Cabri-géomètre et qui visent à l'apprentissage des notions de fonction et graphe de fonction*. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00085202

FERNANDO, H.-E. (1998). Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 6, 7*, *26*.

FREIMAN, V., MARTINOVIC, D., & KARADAG, Z. (2009). Decouvrir le potentiel educatif du logiciel dynamique GeoGebra : Communaute de collaboration et de partage. *Bulletin AMQ 49* (4), 34-49.

RABARDEL, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques (p. 203-213). *Présenté à Dixième université d'été de didactique des mathématiques, Caen. Consulté à l'adresse http://ergoserv. psy. univparis8. fr/Site/Groupes/Modele/Articles/Public/ART372248700765426887. PDF.*

Catégorisation de quelques problèmes de proportionnalité

Mohamed Wardi Ouni
E.P. Bouhssina 2, Sousse-Tunisie
Slim Mrabet
Universit de Carthage, Tunisie

RÉSUMÉ

L’objet de ce travail est de contribuer aux travaux de recherche qui mettent en évidence l’importance du processus de conceptualisation. Nous nous focalisons sur un thème central en fin de l’enseignement primaire et tout au long du collège : la proportionnalité, et sur certains types de problèmes qui le caractérisent. Nous partons d’un constat qui nous a interpelés : les idées qui commandent la variation de ces problèmes ne semblent pas être claires. Ainsi, dans ce travail, nous tentons de creuser cette question et de s’interroger sur la façon de catégoriser ces problèmes. Pour ce faire, nous nous plaçons dans le contexte de l’enseignement primaire tunisien, proposons un ensemble de situations qui relèvent de la proportionnalité dans laquelle nous varions les données suivant une logique que nous expliquons, et mettons au service des enseignants une nouvelle approche de catégorisation. Nous utilisons des représentations sous forme de tableaux qui peuvent avoir le double rôle de permettre aux élèves de mieux comprendre les relations entre les données et les inconnus, et d’aider les enseignants à unifier certaines procédures de résolution. Nous faisons recours aux expressions mathématiques suivantes : C_5^2-1, C_7^3-1, C_9^4-1 et C_n^p-1 pour rassembler des cas de proportionnalité dans des classes de problèmes bien déterminées.

1. INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

Après une longue expérience avec le système d’enseignement tunisien, nous partons dans ce travail de notre inquiétude quant aux faibles résultats de nos élèves de 6éme année du premier cycle de l'enseignement de base tunisien (élèves de 11 à 12 ans) en mathématiques, dans le concours d'accès aux collèges pilotes. A l’instar de beaucoup d’enseignants, nous nous sommes posé la question des raisons qui expliquent ces résultats. Des difficultés de traiter une situation de proportionnalité, de mettre en œuvre des stratégies de sa résolution et de délimiter des relations entre les concepts qui entrent en jeu, sont au cœur de cette question puisque le thème de proportionnalité est souvent central dans ces concours. Mais d’autres facteurs pourraient également intervenir relativement aux situations présentées à l’apprenant, et aux efforts fournis par les enseignants pour apprendre aux élèves à choisir des pistes adéquates de résolution. Après plusieurs années d’enseignement de ce niveau, nous pouvons affirmer que les élèves éprouvent en général, des difficultés notables liées à ce thème, et que certains enseignants ont du mal à expliquer à leurs élèves les procédures de résolution d'une manière claire et accessible à tous. Ainsi, nous rejoignons deux questions de Vergnaud (1990) :

Peut-on trouver des schèmes pour regrouper ces problèmes dans des classes bien déterminées afin d’unifier les procédures de leur résolution ?

Peut-on utiliser les représentations graphiques, les nombres de données et d’inconnues dans une situation pour mieux comprendre les relations qu’entretiennent les données et les inconnues et de regrouper celles qui se ressemblent ?

2. MÉTHODOLOGIE

Pour creuser cette question, nous avons consulté et analysé quelques sujets de mathématiques proposés dans ce concours, tout en mettant l'accent sur le thème de proportionnalité. Nous avons regroupé les épreuves de cinq concours proposés durant les années de 2007 à 2011, à raison de 3 problèmes par concours. Parmi les 15 problèmes retenus, 5 relèvent de la proportionnalité (grandeurs de l'espace de mesure M1 exprimée en pourcentage). Nous avons procédé à une représentation sous forme de tableaux de toute situation de proportionnalité, précisant à chaque fois ce qui est donné et ce qui demandé, et expliquant les moyens de passage d'une représentation sous forme de tableaux aux procédures de résolution. Nous nous inspirons des travaux de Vergnaud (1990) pour mettre en avant le lien entre les données du problème et les conséquences sur l'apprentissage des élèves. Les données et les inconnues de chaque problème sont ainsi réparties sur 8 tableaux en faisant une classification croisée entre 3 colonnes et 2 lignes.

Dans les problèmes que nous traitons, nous avons toujours un produit initial, exprimé soit en pourcentage (ligne 1, colonne 1), soit en valeur réelle qui correspond à ce pourcentage (ligne 2, colonne 1), qui va subir soit une augmentation, soit une diminution. La forme générale des deux tableaux obtenus est la suivante.

	L'initial	Augmentation	L'initial + Augmentation
M_1	100%	a%	b%
M_2	x	y	Z

Tableau 1

	L'initial	Diminution	L'initial - Diminution
M_1	100%	a%	b%
M_2	x	y	Z

Tableau 2

M_1: *grandeurs exprimées en pourcentage.*

M_2: *valeurs correspondantes aux grandeurs exprimées en pourcentage*

3. CADRE THÉORIQUE

En didactique, le travail sur les problèmes arithmétiques est un enjeu fort de l'enseignement mathématique de l'école. Le défi est de comprendre ce que se joue pour le sujet dans la résolution, notamment cette dialectique (mentale) entre trouver une stratégie efficace dans la mémoire de l'élève des problèmes analogues, et l'élaboration d'une nouvelle stratégie si le problème n'est pas lié à une ancienne stratégie connue, Houdement (2017). Les plus liés à notre sujet sont ceux qui mettent en évidence les procédures de résolution et/ou l'importance de la représentation graphique.

Vergnaud (1990) a développé l'analyse de la structure mathématique du problème de proportionnalité, à savoir les relations qui entretiennent les questions et les différentes données de l'énoncé, et a souligné l'importance du concept d'homomorphisme dans l'analyse des rapports entre le réel et sa représentation, tant dans la conceptualisation que dans la symbolisation. Il relie le problème de la sélection des éléments avec les opérations de pensée nécessaires à la lecture d'une représentation graphique, qui permettent de dégager sans ambiguïté les résolutions numériques.

D’autre part, il pose le problème de la relation entre le rapport signifiant/signifie et l’organisation de la représentation spatiale d’un concept scientifique. Cette dernière va aider non seulement à représenter les relations, mais aussi à faire le passage de la représentation du problème à celle de sa solution. Sur ce point, Nesher (1988) a demandé à 46 élèves âgés de douze ans de représenter systématiquement par écrit les quatre termes appartenant aux deux espaces de mesure d’un ensemble de huit problèmes multiplicatifs complexes. La réussite augmente alors de manière spectaculaire, en passant de 38% à 73%. Sur ce point, Levain (1992) a présenté 50 problèmes multiplicatifs à un échantillon composé de 46 élèves de CM2. Les résultats montrent que la structure du problème détermine dans une large mesure la réussite ou l’échec des élèves. Pour la classification des problèmes, il remarque que les énoncés relevant d’une même structure mathématique appartiennent à une même classe de problèmes et que, en fonction de la donnée recherchée, une même classe de problèmes pourrait se subdiviser en plusieurs catégories.

Selon Levain, les représentations symboliques ont le mérite d’être laconique. Les propriétés de l’espace permettent de bien mettre en évidence les correspondances colonne à colonne et ligne à ligne, ce qui permet de dégager les solutions numériques.

Certaines recherches ont mis l’accent sur l’importance de la nature des données dans les problèmes de proportionnalité. Karplus et Karplus (1972) ont été parmi les premiers qui ont analysé les procédures utilisées par les élèves pour résoudre un problème de proportionnalité, et ont remarqué que ces derniers utilisent incomplètement les données de l’énoncé pour une procédure additive, alors que Levain (1995) recommande de présenter plus systématiquement aux élèves les différentes structures de problèmes en faisant varier très largement les valeurs numériques (petit entiers, grand entiers, décimaux supérieurs et inférieurs à 1).

Mais à côté de la variation des valeurs numériques, nous montrerons qu’il importe de présenter systématiquement aux élèves les différentes structures du problème posé, en faisant varier les données dans une classe de situations qui se ressemblent, et ce, pour aider les élèves à constituer un répertoire de procédures organisées et favoriser la compréhension des problèmes de proportionnalité. Ainsi, dans ce qui suit, nous tentons de trouver un moyen de classer les problèmes de proportionnalité qui, aux termes Vergnaud (1990), ne se laissent pas se classer facilement. Un même concept peut opérer dans plusieurs situations alors que plusieurs concepts agissent à l’intérieur d’une même situation.

4. Classification des problèmes de proportionnalité : une nouvelle approche

Cette approche suit le schéma suivant :

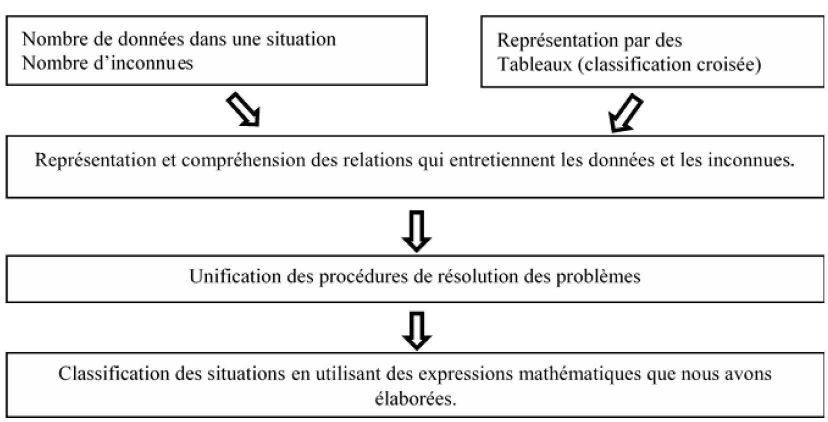


***Schéma**. Classification des problèmes de proportionnalité*

4.1 Catégorie 1 : La classe des problèmes : $C^2_5 1$

Cette classe est représentée comme suit :

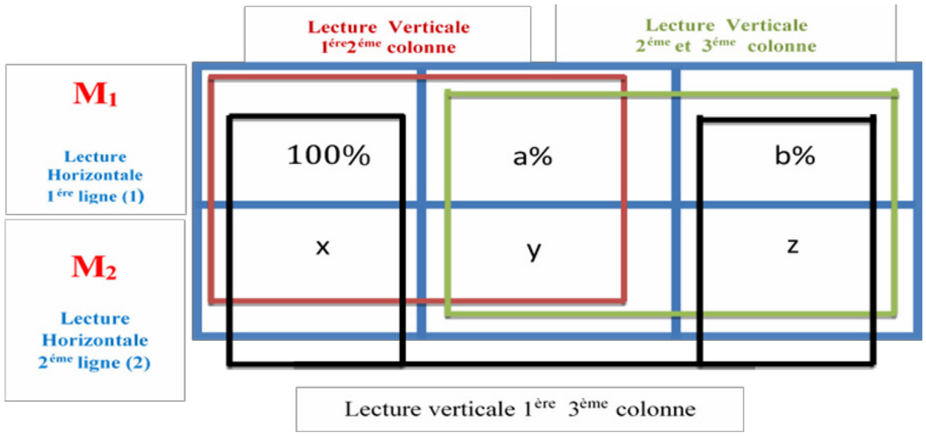


Tableau 3

Remarquons que ce tableau permet de distinguer deux cas, suivant qu'il s'agit dans le problème d'une augmentation ou d'une diminution de la quantité initiale.

Pour une augmentation, nous avons les égalités *

$100 + a = b$, $x + y = z$, $100y = ax$, $az = by$ et $100z = bx$

Pour une diminution, nous avons les égalités

$100 + a = b$, $x + y = z$, $100y = ax$, $az = by$ et $100z = bx$

$100 - a = b$, $x - y = z$

Nous avons ainsi un tableau de six cases « classification croisée : 2 lignes et 3 colonnes ».

Lecture horizontale. 1er ligne : relations additives (grandeurs exprimées en pourcentage).

2ème ligne : relations additives (valeurs correspondantes aux grandeurs exprimées en pourcentage).

Lecture verticale. Il s'agit d'une proportionnalité simple pour chaque paire de colonnes choisie.

Dans cette catégorie, nous avons une donnée invariable qui occupe la 1ère case de la 1ére ligne (le taux de pourcentage de le la quantité initiale est « 100% »), et deux données variables qui peuvent occuper les 5 autres cases, avec la contrainte suivante : la 1ère inconnue qu'on va chercher doit être placée sur une même ligne avec deux données. Remarquons que, par conséquent, le cas où les deux données variables occupent la 2ème et la 3ème case de la 1ere ligne est à éliminer. Dans cette catégorie, le nombre de cas possibles est donc: $C_5^2 - 1 = 9$.

Voici deux exemples des 9 cas possibles, le travail sur le reste des cas est similaire.

<u>1er cas</u>

100%	a%	b? %
x	y?	z?

Tableau 4

On a $100 + a = b$; $y = \frac{ax}{100}$

Nous avons un tableau identique dans le cas d'une diminution, et il en est de même pour les cas qui suivent.

2ème cas

100%	a%	b? %
x?	y	z?

Tableau 5

Dans cette catégorie de problèmes, nous avons une donnée invariable qui occupe la 1ère case de la 1ère ligne (le taux de pourcentage de la quantité initiale est « 100% »), et deux données variables qui peuvent occuper les 5 autres cases avec les mêmes contraintes citée plus haut. Le nombre de cas possibles dans cette catégorie est: $C_5^2 - 1 = 9$, aussi bien dans le cas d'une augmentation que dans le cas d'une diminution.

4.2 La classe les problèmes : C^2_5-1 (grandeurs de l'espace de mesure M1 exprimées en fraction)

Cette classe est représentée comme suit :

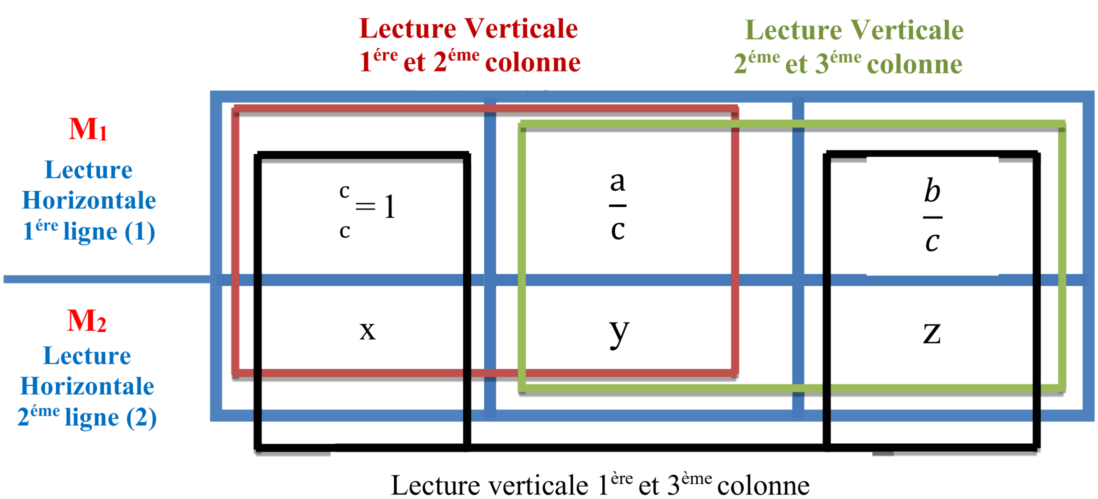


Tableau 6

$\frac{c}{c} = 1$	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$?
x	y?	z?

Tableau 7

On a $\frac{b}{c} = \frac{c}{c} + \frac{a}{c}$; $y = \frac{ax}{c}$

Nous pouvons faire un travail identique avec 4 autres cas dans lesquels nous choisissons $\frac{a}{c}$ comme variable dans la première ligne, et nous faisons varier la place des deux autres inconnues dans la deuxième ligne.

Les cas suivants consistent à choisir deux inconnues dans la première ligne ($\frac{a}{c}$ *et* $\frac{b}{c}$) et faire varier la place de la troisième inconnue dans la deuxième ligne. En voici un exemple :

$\frac{c}{c} = 1$	$\frac{a}{c}$?	$\frac{b}{c}$?
x	y	z?

Tableau 8

On a $z = x + y$; $a = \frac{cy}{x}$

Les relations reliant les données du tableau :

* Pour une augmentation

$\frac{c}{c} + \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

$z = x + y$

$cy = ax; az = by; cz = bx$

* Pour une diminution

$\frac{c}{c} - \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

$z = x + y$

Dans cette catégorie de problèmes, nous avons une donnée invariable qui occupe la 1$^{\text{ère}}$ case de la 1$^{\text{ère}}$ligne (La fraction $\frac{c}{c} = 1$) et deux données variables qui peuvent occuper les 5 autres cases avec toujours les mêmes contraintes que plus haut. Le nombre de situations possibles est $C_5^2 - 1 = 9$

4.3 Catégorie 2 : cas des problèmes de la proportionnalité simple composée, de la classe $C_5^2 - 1$

Exemple

Une jupe coutait 90 $^{\text{DT}}$, son prix augmente de 10% puis augmente de 15%. Quel est son prix final ?

L'élève doit remplir les cases d'un premier tableau

100%	10%	inc1 ?%
90DT	inc2 ?	inc3 ?

Tableau 9

$inc_1 = 100\% + 10\% = 110\%$

$inc_2 = \frac{90 \times 10}{100} = 9^{DT}$

$inc_3 = 90 + 9 = 99^{DT}$ / ou $\frac{9 \times 110}{10} = 99^{DT}$/ ou $\frac{90 \times 110}{100} = 99^{DT}$

Puis, il remplit les cases d'un 2$^{\text{eme}}$ tableau

1 = 100%	15%	inc1 ?%
99DT	inc2 ?	inc3 ?

Tableau 10

$inc_1 = 100\% + 15\% = 115\%$

$inc_2 = \frac{99 \times 15}{100} = 14^{DT},850$

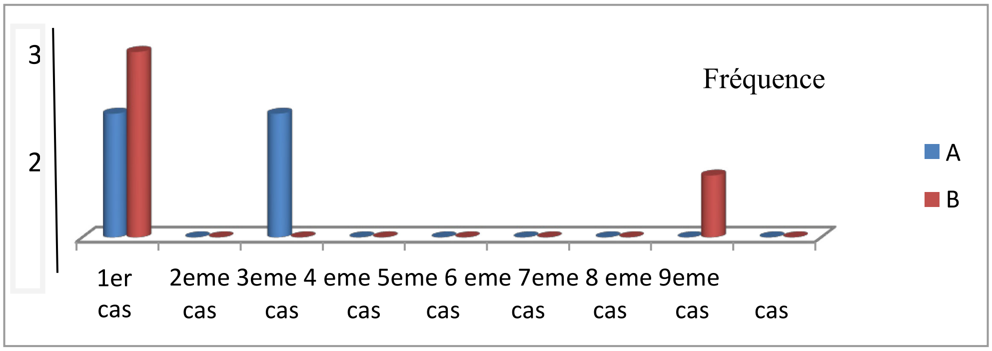
$inc_3 = 99 + 14,850 = 113^{DT},850$

ou inc$_3$= $\frac{14{,}850\text{x } 115}{15}$ = 113^{DT},850 ou inc$_3$= $\frac{99 \text{ x } 115}{100}$ = 113^{DT},850

Les contraintes de l'emplacement des variables et des données étant les mêmes que les cas précédents, les problèmes de la proportionnalité simple composée font partie de la classe $\mathbf{C_5^2}$ **-1.**

A partir de ce résultat, nous reprenons les sujets des concours tunisiens où tous les problèmes proposés font partie de cette catégorie.

Dans l'histogramme suivant, A désigne le cas d'une augmentation; B le cas d'une diminution. Les résultats obtenus sont les suivants :



Histogramme

Nous avons remarqué que :

Un premier cas est répété 5 fois, un deuxième cas est répété 2 fois et un troisième cas est repris une seule fois.

Tous les autres cas ne font pas parties des sujets des concours. L'apprenant est testé deux fois dans un même cas à la même session. Ceci pose une question principale quant aux critères mis en place par les responsables de la préparation de ces épreuves.

4.4 Catégorie 3 : La classe des problèmes : $\mathbf{C_7^3 - 1}$

Cette catégorie est représentée selon le tableau suivant

M_1	$\frac{d}{d}$	$\frac{a}{d}$	$\frac{b}{d}$	$\frac{c}{d}$
M_2	x	x_1	x_2	x_3

Tableau 11

Nous avons un tableau de huit cases (classification croisée de 2 lignes et 4 colonnes).

Les relations reliant les données du tableau

$d = a + b + c$; $x = x_1 + x_2 + x_3$; $ax = dx_1$; $bx = dx_2$; $cx = dx_3$

$ax_2 = bx_1$; $bx_3 = cx_2$; $cx_1 = ax_3$

<u>Lecture horizontale :</u>

1^{ere} ligne : relations additives (grandeurs exprimées en fraction)

2ème ligne : relations additives (valeurs correspondantes aux grandeurs exprimes en fraction)

Lecture verticale

Il s'agit d'une proportionnalité simple pour toutes les paires de colonnes choisies.

Dans cette catégorie de situations, nous avons une donnée invariable qui occupe la 1ere case de la 1ere ligne ($\frac{d}{d} = 1$) et 3 données variables qui peuvent occuper les 7 autres cases avec toujours la condition : la 1ere inconnue qu'on va chercher doit être sur la même ligne avec 3 données, et le même cas à éliminer: lorsque les 3 données variables occupent la 2eme, la 3eme et la 4eme cases de la 1ere ligne.

Le nombre de situations possibles relativement à cette catégorie est : $C_7^3 - 1 = 34$

Exemple

Un agriculteur exploite un champ dont la superficie est de 160 hectares comme suit :

	Superficie totale	Superficie cultivée en blé	Superficie plantée en oliviers	Superficie cultivée en légumes
Les fractions qui les représentent	$1 = \frac{8}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	inc_1?
Superficie en hectares	160 hectares	inc_2 ?	Inc_3?	Inc_4 ?

Tableau 12

Remplis les cases vides du tableau.

L'élève peut suivre les étapes suivantes

$inc_1 = \frac{8}{8} - (\frac{1}{4} - \frac{3}{8}) = \frac{3}{8}$; $inc_2 = \frac{160 \text{ x } 2}{8} = 40$ hectares; $inc_3 = \frac{40 \text{ x } 3}{2} = 60^h$ ou $\frac{160 \text{ x } 3}{8} = 60$ hectares

$inc_4 = inc_3 = \frac{160 \text{ x } 3}{8} = 60$ hectares

ou 160 – (40 + 60) = 60 hectares

Ce problème fait partie de la classe $C_7^3 - 1$. Le nombre de données variables est 3

Le nombre d'inconnues est 7 – 3 = 4; Le nombre de situations possibles est $C_7^3 - 1 = 34$

Remarquons que dans ce tableau, le choix de l'ordre des inconnues est arbitraire.

4.5 Catégorie 4 : La classe des problèmes $C_9^4 - 1$

Nous représentons cette catégorie selon le tableau suivant :

M_1	$\frac{e}{e} = 1$	$\frac{a}{e}$	$\frac{b}{e}$	$\frac{c}{e}$	$\frac{d}{e}$
M_2	X	x_1	x_2	x_3	x_4

Tableau 13

Dans ce tableau, les données sont liées par les relations suivantes :

$e = a + b + c + d$; $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$; $ax = ex_1$; $bx = ex_2$; $cx = ex_3$; $dx = ex_4$

$ax_2 = bx_1$; $ax_3 = cx_1$; $ax_4 = dx_1$; $bx_3 = cx_2$; $bx_4 = dx_2$ et $cx_4 = dx_3$

Nous avons un tableau de dix cases : une classification croisée de 2 lignes et 4 colonnes.

Dans cette catégorie, nous avons une donnée invariable qui occupe la 1ere case de la 1ère ligne ($\frac{e}{e} = 1$) et 5 données variables qui peuvent occuper les 9 autres cases avec toujours les mêmes contraintes : la 1ère inconnue qu'on va chercher doit être sur la même ligne avec 4 données ; le cas où les 4 données variables occupent la 2ème, la 3ème, la 4ème et la 5ème case de la 1ere ligne est à éliminer.

Au total, le nombre de cas possibles dans cette catégorie est : $C_9^4 - 1 = 125$. En voici un exemple :

Exemple

Mon père envoie le $\frac{1}{7}$ de son revenu mensuel à mon frère, étudiant à la faculté de Tunis.

Mon frère partage le montant reçu comme suit :

	Le montant reçu	Loisir et déplacement	Journaux et revus	La nourriture	Épargne
Les fractions qui les représentent	$1 = \frac{12}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{inc_1 ?}{12}$
Les valeurs correspondantes en DT	Inc_5 ?	Inc_4 ?	Inc_3?	32^{DT}	inc_2 ?

Tableau 14

Quel est le revenu mensuel de mon père ?

L'élève doit remplir les cases vides par des inconnues, puis, il cherche ces inconnues (le choix de l'ordre des inconnues est arbitraire):

$$inc_1 = \frac{12}{12} - (\frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{4}$$

$$inc_2 = \frac{32 x 4}{4} = 32^{DT}$$

$$inc_3 = \frac{32 x 3}{4} = 24^{DT}$$

$$inc_4 = \frac{24 x 1}{3} = \frac{32 x 1}{4} 8^{DT}$$

$$inc_5 = 8 + 24 + 32 + 32 = 96^{DT}$$

Le revenu mensuel de mon père = 96 x 7 = 672^{DT}

5. Conclusion

Dans notre lecture des épreuves des concours de mathématiques, nous avons remarqué une variation des valeurs numériques dans une même catégorie de problèmes. A notre avis, ce choix ne permet pas aux élèves de construire des schèmes pour résoudre des problèmes de proportionnalité. Il serait plus pertinent de présenter aux élèves les différentes structures des problèmes en faisant varier les données dans une classe de situations qui se ressemblent, et ce, pour aider les élèves à constituer un répertoire de procédures organisées et favoriser la compréhension des problèmes de proportionnalité. Par exemple, comme nous venons de le prouver, pour résoudre des problèmes dans des catégories C_5^2-1, C_7^3-1, C_9^4-1, l'élevé utilise les mêmes procédures. Ce résultat pourrait être généralisé à une catégorie de type C_n^p-1, où $n = 2p + 1$. Dans ce cas :

Le nombre de données variables est p

Le nombre d'inconnues est $n - p = (2p + 1) - p = p + 1$

Le nombre de cases qui peuvent être occupées par les données variables est $n = 2p + 1$

Le nombre de cas possibles est $C_n^p - 1 = C_{2p+1}^p - 1 = \frac{(2p+1)!}{((2p+1)-p)!p!} - 1 = \frac{(2p+1)!}{((p+1))!p!} - 1$

Cette idée de catégorisation qui se base sur des formules simples pourrait être au service des enseignants de mathématiques du primaire. En outre, les expressions $C_p^n - 1$ peuvent être traduites grâce à des langages de balisage tels que HTML et des langages de programmation comme JavaScript, pour créer un produit exécutable par un ordinateur. Cela pourrait faciliter l'auto-apprentissage des élèves et l'apprentissage à distance. Il nous semble que son impact sur l'apprentissage des élèves est une piste qui mérite d'être explorée.

BIBLIOGRAPHIE

HOUDEMENT, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école, *Grand N*, 100, 59 - 78

KARPLUS, R. et KARPLUS, E.F. (1972). Intellectuel development be yondele mentaryschool : Rtio, a longitudinal study. *School, Science and Mathematics*, 72, 735-742.

LEVAIN, J.P. (1992). La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire, *Educational Studies in Mathematics*, 23,139-161

LEVAIN, J.P. (1995). *Proportionnalité simple, proportionnalité multiple*, Cycle III.

NESHER, P. (1988). Multiplicative school word problems : theoritical approches and empirical findings, in Hiebert J. and Beher M (Ed.), Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Hillsdale N.J : Erlbaum/Reston, VA : National Concil of Teachers of Mathematics, 19-40.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.10, 2-3, 133-17

Groupe de travail n°4 (GT4)

Dimensions historique, épistémologique, philosophique, idéologique et culturelles dans le projet de l’interdisciplinarité

Bilan du GT4

DIMENSIONS HISTORIQUE, ÉPISTÉMOLOGIQUE, PHILOSOPHIQUE, IDÉOLOGIQUE ET CULTURELLES DANS LE PROJET DE L'INTERDISCIPLINARITÉ

Responsables

Faten Khalloufi-Mouha[1] – Hassane Squalli[2]

1. Présentation

L'intérêt porté à une dimension interdisciplinaire dans l'enseignement des mathématiques a émergé à la suite de l'échec de la réforme des mathématiques modernes. L'idée de l'interdisciplinarité a été essentiellement liée à une volonté de diminuer le niveau d'abstraction des concepts mathématiques enseignés et de faire apparaitre leurs utilités à travers des situations concrètes et/ou en lien avec les autres disciplines. Dans cette perspective, l'objectif de la troisième édition du colloque d'ADiMA a consisté à porter un regard scientifique sur l'interdisciplinarité dans l'enseignement et la recherche en mathématique et en didactique des mathématiques en Afrique. Le groupe de Travail 4 vise à promouvoir les échanges scientifiques sur le thème de l'interdisciplinarité dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et à mettre en place une réflexion collective sur la manifestation des dimensions historiques, épistémologique, philosophique, idéologique et culturelle dans le cadre du projet d'interdisciplinarité. Dans cette perspective, le thème du groupe aborde également l'idée de concevoir la didactique des mathématiques comme un espace d'interdisciplinarité où interviennent les dimensions historique, épistémologique, philosophique, idéologique et culturelle. Les contributions ont été classées selon les trois axes suivants:

- Axe 1 : Dimension historique et épistémologique dans la didactique des mathématiques en tant qu'un espace d'interdisciplinarité.
- Axe 2 : La prise en considération du concret et de la dimension culturelle dans le projet de l'interdisciplinarité
- -Axe 3 : Le projet d'interdisciplinarité et le lien entre les mathématiques et les différentes disciplines.

2. Travaux présentés dans le groupe de travail GT4

Sept textes retenus dans le groupe GT4 ont donné lieu à des présentations. Bien que ces textes puissent s'inscrire dans plusieurs axes relatifs à la thématique de l'interdisciplinarité, nous avons choisi de les classer selon les trois axes identifiés. Le premier axe a été représenté par trois communications. La première communication de Oueslati et Najar a permis d'introduire un aperçu historique et épistémologique de la notion d'interdisciplinarité, préciser sa signification, ses finalités, les différentes manières de son opérationnalisation ainsi que les liens entre les différentes disciplines impliquées dans une activité interdisciplinaire. L'étude a abordé à travers l'exemple du

[1] Université de Carthage-Tunisie- faten.khalloufi@fsb.u-carthage.tn
[2] Université de Sherbrooke - Canada – Hassane.Squalli@USherbrooke.ca

système éducatif tunisien, le rapport institutionnel au projet d'interdisciplinarité et les contraintes de sa mise en œuvre au niveau de l'enseignement.

La thématique du fonctionnement de la didactique des mathématiques comme un espace d'interdisciplinarité où interviennent les dimensions historiques, épistémologiques, philosophiques, idéologiques et culturelles a été représentée par la communication de Gharbi et Kouki qui se base sur une analyse de la genèse historique et épistémologique de la notion de valeur absolue pour étudier les conceptions des élèves de la première année du cycle secondaire tunisien à propos de cette notion.

La question des liens entre la dimension historique et l'enseignement/apprentissage des mathématique a été abordée dans la communication de Nafti. Le travail compare les différentes techniques utilisées dans deux approches algébriques de résolution des équations quadratiques proposées par les deux mathématiciens al-Karajī (Xe siècle) et Ibn al-Bannā' (XIIIe siècle).
Le deuxième axe a été représenté par deux communications. La première de Khalloufi-Mouha, Ben Nejma, Adel et Najar a permis de faire apparaitre le rôle du concret dans l'enseignement des mathématiques qui est privilégié dans l'approche de l'enseignement par compétences adoptée dans l'enseignement tunisien. Ce travail s'inscrit dans la lignée des travaux en didactique de l'algèbre portant sur la modélisation de situations concrètes comme une voie d'accès vers le développement précoce de la pensée algébrique, c'est-à-dire avant l'introduction du langage littérale de l'algèbre.
La communication de Mesquita et al., illustre les liens entre les mathématiques et le domaine linguistique en focalisant sur la numération et le comptage. Elle étudie certains aspects linguistiques, sémantiques, culturels et terminologiques liés au comptage, dans certaines langues naturelles.
Le troisième axe a été également représenté par deux communications. Gbaguidi a abordé l'interrelation du thème mathématique " grandeurs et mesures" avec les Sciences Physiques et a mis en évidence certaines situations conflictuelles entre les mathématiques et la physique lesquelles pourraient être des sources de confusion à l'appropriation de certaines notions.
La communication de Soltani étudie l'interaction entre les mathématiques et l'informatique du point de vue des raisonnements, inductif et par récurrence. En se basant sur une étude historique, épistémologique et didactique de ces concepts, cette communication a soulevé certaines ambiguïtés d'enseignement-apprentissage du raisonnement inductif et par récurrence en mathématique et la récursivité en informatique.

3. Bilan et perspectives

Les discussions ayant suivi les différentes communications ainsi que la séance de synthèse ont permis de soulever plusieurs points relatifs à l'idée d'interdisciplinarité. Ces discussions ont mis l'accent sur l'importance de l'ouverture des mathématiques sur les autres disciplines afin de faire sortir son enseignement du formalisme exclusif et donner du sens aux concepts mathématiques à travers des situations concrètes. Les échanges ont permis de discuter le rôle du concret dans l'enseignement des mathématiques et de soulever les points suivants comme des sujets à explorer :

- L'interdisciplinarité en tant que méthodologie, un processus, un concept ou une philosophie.
- L'idée de l'identité disciplinaire et de la frontière entre les disciplines qui ne doit pas être conçue comme un lieu de rupture, mais plutôt comme un espace pour élaborer des objectifs communs favorisant le développement chez les apprenants des compétences flexibles.
- Les moyens pour dépasser les obstacles institutionnels qui rendent difficile l'établissement d'un enseignement interdisciplinaire.

L'Interdisciplinarité et l'histoire de la notion de mesure des grandeurs en mathématiques et physique au collège, au Bénin

Ahonankpon Florent Gbaguidi

Enseignant-chercheur à l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP)

RESUME

Le thème " grandeurs et mesures" a fait l'objet de développement dans les travaux des anciens mathématiciens tels que : les pythagoriciens et Euclide. Leurs travaux ont été poursuivis par les mathématiciens des temps modernes comme Descartes pour rendre ce thème enseignable. Les grandeurs et mesures comme notre objet d'études sont des outils importants dans plusieurs domaines de mathématiques. Elles sont au cœur du développement de plusieurs disciplines telles que : les sciences physiques, les sciences de la vie et de la terre…
Ainsi, nous avons étudié la place et le rôle du thème "grandeurs et mesures" dans les programmes d'études de la mathématique au Bénin. L'interrelation de ce thème avec les Sciences Physiques a permis de mettre en évidence certaines situations conflictuelles entre les mathématiques et la physique lesquelles pourraient être des sources de confusion à l'appropriation de certaines notions.

Mots-clefs : Enseignement, apprentissage, mesure, grandeur, épistémologie

1. PROBLEMATIQUE ET CADRE THEORIQUE DE NOTRE ETUDE

1.1 Problématique

La construction des grandeurs ainsi que de leurs mesures ont été à l'origine de développement des mathématiques grâce aux travaux de certains mathématiciens tels que : Euclide, Descartes et autres. Les grandeurs et leurs mesures dans leur construction, ont joué un rôle prépondérant entre les cadres numérique, géométrique et l'analyse et aussi entre les mathématiques et la physique. Henri Lebesgue, dans son livre "*La mesure des grandeurs*" a souligné l'importance de ce rôle par ce qui suit :

> Il n'y a pas de sujet plus fondamental : la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications mathématiques et comme les mathématiques appliquées ont évidemment précédé les mathématiques pures, la logique mathématique, on imagine d'ordinaire que la mesure des aires et des volumes est à l'origine de la Géométrie ; d'autre part, cette mesure fournit le nombre, c'est-à-dire l'objet même de l'Analyse. (Lebesgue, 1975, p.2)

Toujours dans le sens de souligner le rôle important que les grandeurs et leurs mesures ont joué dans l'histoire des mathématiques, il est écrit dans le document d'accompagnement de troisième publié en 1999 et cité par Noirfalise (2007) ce qui suit :

> Historiquement, c'est bien à partir d'un travail sur les grandeurs qu'ont été construits la plupart des concepts et des théories mathématiques. Il serait d'autant plus dommageable de perdre de vue cette filiation que comme cela a été signalé, c'est elle qui permet d'assurer les liens avec les autres disciplines. (Noirfalise, 2007, pp. 22-23)

Dans la continuité de l'école primaire, les mesures des grandeurs sont étudiées et enrichies au collège et portent essentiellement sur la longueur, la surface, le volume et la masse, le temps, l'argent, la vitesse, la fréquence, la concentration, etc. Le travail sur les mesures des grandeurs provient essentiellement de la résolution des problèmes.

L'enseignement et l'apprentissage de la mesure des grandeurs peuvent être perçus comme :

- des liens à d'autres domaines de mathématiques tels que, l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie où la mesure des grandeurs est étudiée en tant qu'objet ou exploitée en tant qu'outil pour l'étude d'autres notions ;
- des liens avec la vie quotidienne où les connaissances acquises à l'école sur la notion des mesures peuvent être exploitées dans des situations non didactiques. Mais les connaissances empiriques de la vie sur la mesure peuvent aussi servir dans une situation didactique.
- des liens avec la physique (ou d'autres disciplines scolaires), il est à noter par exemple que la mesure est au cœur de la physique, mais des situations conflictuelles entre les mathématiques et la physique devaient être surmontées pour une exploitation efficace et efficiente de la mesure.

Il est à souligner que l'insuffisance des connaissances liées aux concepts et aux compétences en matière de mesure devient problématique lorsqu'on étudie d'autres disciplines.

1.2 Question de recherche

Pour notre travail, nous nous sommes posé la question suivante :
Quels sont la place et le rôle de l'enseignement et de l'apprentissage de la mesure des grandeurs au collège au Bénin et son interrelation avec la physique ?

Pour répondre à cette question, nous pensons étudier :

1- Les grandeurs et mesures dans les travaux de quelques mathématiciens.
2- Les niveaux de codétermination didactique associés aux grandeurs et mesures dans les programmes d'études au collège au Bénin.
3- Les rôles des grandeurs et mesures dans l'enseignement et l'apprentissage de la mathématique au collège au Bénin.
4- L'interrelation des grandeurs et mesures avec les sciences physiques.

1.3 Cadre théorique

La théorie qui sert de soubassement à notre étude est la théorie anthropologique du didactique de Chevallard dans sa dimension concernant les niveaux de codétermination didactique de Chevallard.
Chevallard (2001) a introduit l'échelle de niveaux de codétermination didactique qui permet de repérer les conditions, les contraintes et l'interdépendance des différents niveaux allant du niveau des sujets abordés dans l'enseignement d'une discipline comme les mathématiques jusqu'aux niveaux de la société et de la civilisation qui sont les niveaux les moins spécifiques de la discipline concernée mais qui interviennent dans le processus de la transposition didactique.

Civilisation
↓↑
Société
↓↑
Ecole
↓↑
Pédagogie
↓↑
Discipline
↓↑
Domaine ⇄ Secteur ⇄ Thème ⇄ Sujet

Figure 1. *Échelle de niveaux de codétermination de Chevallard (2001, pp. 9-10)*

Nous allons utiliser cette échelle pour questionner la place et le rôle des mesures des grandeurs relativement aux conditions et contraintes qui relèvent des différents niveaux de codétermination proposés par Chevallard (2001), allant du niveau du sujet jusqu'à celui de la discipline.

2. GRANDEURS ET MESURES DANS LES TRAVAUX DE QUELQUES MATHÉMATICIENS

Dans cette partie, nous allons étudier la place accordée dans les travaux de certains savants aux grandeurs et leurs mesures.

2.1 Grandeurs et mesures chez les Pythagoriciens

Selon les principes de la doctrine pythagoricienne, le nombre est le principe de toutes choses et chaque nombre est associé à une figure, toutes les choses créées ont chacun un nombre pour symbole. Ce qui justifie la formule suivante :

"la justice est un nombre à la deuxième puissance ", citée par Aristote (384 AV.J.- C.).

Avec la doctrine pythagoricienne, ce sont les nombres qui fondent les mathématiques et la physique, plus précisément les nombres naturels. Comme toute réflexion est basée sur les nombres naturels, pour les pythagoriciens, deux grandeurs sont toujours commensurables, c'est-à-dire que deux grandeurs sont toujours mesurables par une unité qu'on peut trouver. Mais une rupture s'opère par rapport à cette idée lorsqu'on considère un côté et la diagonale d'un carré ; Ces deux grandeurs sont incommensurables car la diagonale d'un carré n'est pas commensurable.

2.2 Grandeurs et mesures chez Euclide

Les travaux d'Euclide sur les grandeurs sont basés sur ceux de Eudoxe de Cnide (408 AV. J. – C.) qui a surmonté la commensurabilité des grandeurs et a reconnu implicitement l'existence des nombres irrationnels à partir des rapports et proportions. Euclide dans son livre 5 a comparé des rapports de même nature (deux longueurs, deux aires, deux volumes…). Il ne s'agit pas pour Euclide de faire le rapport de deux grandeurs de natures différentes, comme on le fait en langage mathématique moderne au niveau des grandeurs quotients (diviser un volume par une distance pour trouver une aire, une distance par une durée pour obtenir une vitesse).

2.3 Grandeurs et mesures chez Descartes

Voici un bref aperçu sur les travaux de Descartes sur les grandeurs et leurs mesures selon la traduction réalisée par Warusfel (2009) : "La géométrie est le troisième et dernier essai du fameux Discours de la Méthode publié à Leyde en 1637 par René Descartes". C'est le seul et plus important ouvrage de mathématiques qu'il ait publié. Traité de 117 pages et premier écho de la naissance de la géométrie analytique, cet ouvrage avait en fait pour but de donner une méthode générale pour la résolution des équations algébriques et intitulé « des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites » (Warusfel, 2009, p.1). L'ouvrage donne les constructions géométriques élémentaires concernant la multiplication et le quotient de deux nombres, ainsi que la racine carrée d'un nombre à partir de segments donnés, qui peuvent s'obtenir à la règle et au compas à partir d'une unité donnée. C'est ce que Descartes justifie par : « Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin après que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire ».

En exemple, Descartes présente le produit et le quotient comme de simples applications de la propriété de Thalès ainsi que le montre la proposition suivante :

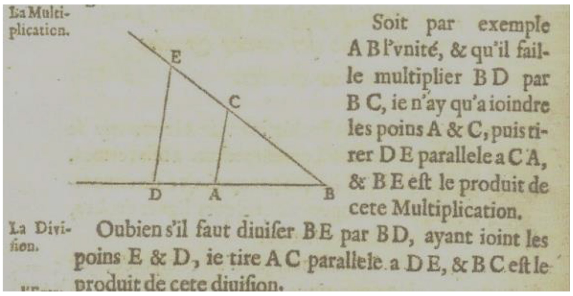


Figure 2. *Échelle Relation entre grandeurs et nombres*

Essayons de reformuler ce raisonnement comme suit :

Supposons que AB soit l'unité de longueur et qu'il faille multiplier BD par BC. Il n'y a qu'à joindre les points A et C puis tracer la parallèle Δ à la droite (CA) passant par D. Soit E le point d'intersection de Δ avec la droite (BC). BE est le produit de BD par BC.
Ou bien, supposons toujours que AB est l'unité de longueur et que BC soit l'inconnu, on a : BC = $\frac{BE}{BD}$. Dans ce cas, c'est la parallèle à la droite (DE) passant par A qui couperait la droite (BE) en C pour que l'on obtienne BC.
Les grandeurs et les nombres sont donc mis en relation par Descartes.
Abordons dans la partie qui suit la place accordée aux grandeurs et leurs mesures dans les programmes d'études et guides pédagogiques du collège au Bénin.

3. NIVEAUX DE CODÉTERMINATION DIDACTIQUE ASSOCIÉS AUX GRANDEURS DANS LES PROGRAMMES D'ÉTUDES DU COLLÈGE AU BÉNIN.

Les grandeurs et mesures, en continuité avec le primaire s'appuient sur la résolution des problèmes souvent empruntés de la vie courante. Elles permettent non seulement de réinvestir les connaissances acquises en mathématiques, mais aussi d'en construire de nouvelles. Les longueurs et les aires par exemple permettent d'enrichir l'étude sur les nombres et les opérations.

Nous voudrions ensuite préciser que les documents qui rendent compte des instructions officielles relatives au programme de mathématiques au Bénin sont au nombre de deux : le premier, le programme d'études qui contient des compétences prescrites av-ec des listings de contenus notionnels et le second, le guide d'enseignement qui contient les situations d'apprentissage qui sont au nombre de quatre (4) de la sixième en troisième et de trois (3) de la seconde en terminale. Officiellement, la situation d'apprentissage est définie comme :

> Un document dans lequel figure un ensemble de tâches et de consignes avec leurs indications pédagogiques respectives, tâches et consignes auxquelles l'enseignant soumet l'élève par des stratégies d'enseignement appropriées afin de le rendre compétent en lui faisant construire, transférer et réinvestir le savoir. Ce document fournit aussi des renseignements sur le contenu de la formation, la durée, le matériel et les stratégies d'enseignement /apprentissage. (Extrait du programme de 6e, 2020, Bénin, p.95)

Chaque situation d'apprentissage est présentée sous forme de deux colonnes. La première est relative aux contenus notionnels et la seconde aux indications pédagogiques. Ces instructions nous permettront de dégager le rapport institutionnel aux grandeurs et mesures.

Nous présentons en annexe, par classe, les formulations relatives aux grandeurs et leurs mesures en suivant respectivement les domaines, les secteurs, les thèmes et les sujets d'études.

Au regard des différentes prescriptions relatives aux grandeurs et leurs mesures dans les classes de 6e, 5e, 4e et 3e présentées en annexe, nous pouvons dire que les grandeurs et leurs mesures ont leur place dans les programmes d'études du Bénin en tant qu'objets d'études et aussi en tant qu'outils.

Chaque grandeur se retrouve à travers un secteur avec des sujets d'études spécifiques autour des thèmes bien identifiés.

En exemple, avec les secteurs conduisant au thème "aires", on peut avoir les sujets d'études suivants : calcul d'aires, comparaison des aires,

Des différents types de tâches que nous avons recensés, le genre de tâches dominant est : "calculer".

4. Rôles des grandeurs et mesures dans les programmes d'études du collège au Bénin

Ce rôle est d'abord perceptible à travers les points suivants des instructions relatives au programme d'études de 6e : « Les formules d'aires et de volumes seront l'occasion, pour les élèves, de travailler sur des expressions algébriques concrètes. » (Extrait du programme de 6e, 2020, Bénin, p.14)

Nous ne voulons pas étaler des applications des grandeurs et mesures, mais nous voulons seulement faire part de quelques exemples significatifs du rôle qu'elles peuvent jouer en mathématiques dans les programmes de collège au Bénin.

- En 6e, en utilisant la formule de l'aire d'un rectangle de dimensions L et h, on prouve que l'aire d'un triangle dont l'un de ses côtés mesure L et la hauteur relative à ce côté, de mesure h, est : $\frac{L \times h}{2}$. En effet,

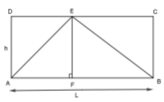


Figure 3. *Aire du triangle à partir de l'aire du rectangle*

ABCD est un rectangle ; AB = L et AD = h

aire(AFE) = $\frac{1}{2}$ ×aire(AFED) ; aire(BFE) = $\frac{1}{2}$×aire(BFEC) ; or

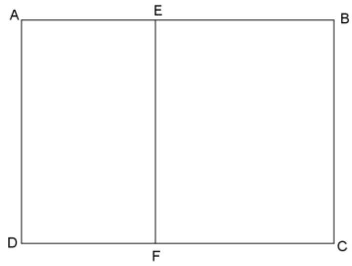
aire(ABE) = aire(AFE) + aire(BFE) donc aire(ABE) = $\frac{1}{2}$ ×aire(AFED) + $\frac{1}{2}$ ×aire(BFEC)

Par suite aire(ABE) = $\frac{1}{2}$× [aire(AFED) + aire(BFEC)] = $\frac{1}{2}$×aire(ABCD) .

Or, aire(ABCD) = L × h ; d'où aire(ABE) = $\frac{L \times h}{2}$

- En 5e, calculer une longueur d'un polygone connaissant son périmètre et les autres longueurs ou calculer par exemple la hauteur d'un prisme droit connaissant son volume et l'aire de la surface de base sont des éléments de motivation pour rentrer dans les équations de type a + x = b ou ax = b dans l'ensemble des nombres décimaux.

- En 4e, en utilisant les aires des rectangles bien déterminés on peut amener les élèves à mieux s'approprier par exemple du développement des expressions algébriques suivantes : a, b, x et y étant des nombres rationnels strictement positifs, on a :
  a(x +y) = ax + ay et (a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by comme l'indique la figure 4



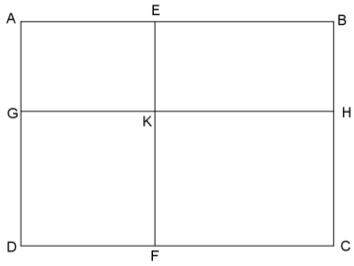


Figure 4. *Exploitation des grandeurs et mesures en calcul littéral*

Les conversions d'unités de longueur, d'aire et de volume, de temps… permettent de faire vivre la proportionnalité, les nombres décimaux, les fractions, etc.

En exemple, pour calculer le temps mis par un automobiliste pour parcourir une distance de 33km, roulant à une vitesse constante de 108km/h, pour ne pas utiliser la formule t = $\frac{d}{v}$, on peut utiliser la proportionnalité et des conversions.

En effet, l'automobiliste parcourt 108 km en une heure, donc pour une distance de 33km le temps t mis vérifie :

$$\frac{t}{1h} = \frac{33km}{108km} \text{ ; soit } t = \frac{33km}{108km} \times 1h \text{ ; } t = \frac{11}{36}h.$$

On sait que : 1h correspond à 3600s donc $\frac{11}{36}h$ correspond à $\frac{11}{36} \times 3600$s = 1100s ce qui fait encore par conversion 18min 2s

Sans être trop exhaustif, les grandeurs et leurs mesures sont des éléments de motivation pour introduire des notions nouvelles et aussi permettent de réinvestir des connaissances acquises en mathématiques.

5. INTERRELATION DES GRANDEURS ET MESURES AVEC LES SCIENCES PHYSIQUES

Etant donné que les grandeurs sont au cœur du développement des sciences physiques, nous voudrions étudier ici un aspect des situations conflictuelles entre les mathématiques et la physique qui pourraient être des obstacles didactiques à l'appropriation de certaines notions. Lorsque nous considérons que le résultat de la mesure d'une longueur est : L = $\frac{110}{7}cm$, on a : L ≈ 15,71cm ; en mathématique on dira que 15,71cm est une valeur approchée de L à 10^{-2} près par défaut ou 15,71cm est un arrondi d'ordre 2 de L. Or en sciences physiques, on écrirait tout simplement que L = 15,71cm. Cette notation en physique confère à L en cm la valeur 15,71qui est un nombre décimal. Ce qui n'est pas accepté en mathématiques car $\frac{110}{7}$ n'est pas un nombre décimal.

Cet aspect est souligné par Bronner et Vignes par ce qui suit :

> Différentes notions apparaissent comme transversales et sont abordées simultanément en mathématique et en sciences physiques selon des perspectives décalées voire divergentes. Les usages, les enjeux, les modes d'approche voire les définitions en mathématique et en physique présentent des différences sensibles, par voie de conséquence, les exigences des enseignants de mathématique et de physique ne peuvent être les mêmes. La question qui se pose alors porte sur la transférabilité et la complémentarité des compétences concernées en classe de mathématique d'une part et en classe de sciences physiques d'autre part : mesure d'une grandeur ; valeurs exactes, valeurs approchées ; ordres de grandeurs ; puissances de 10 ; différentes écritures des nombres (décimale, fractionnaire, scientifique) ; incertitude ; chiffres significatifs. (Bronner et Vignes, 2005, p .3)

Les élèves sont donc parfois confrontés à des aspects contradictoires de présentation de mesures de grandeurs par des professeurs de mathématiques et de sciences physiques

6. Conclusion

Les travaux sur la construction des grandeurs et mesures par certains savants ont été à l'origine de développement des mathématiques. Ces travaux ont été enrichies par les mathématiciens des temps modernes. Les grandeurs et mesures constituent un objet d'enseignement/apprentissage dans les différentes classes du collège et servent aussi d'outils pour le développement d'autres notions. Elles se situent bien dans les activités interdisciplinaires parce qu'elles interviennent dans le développement d'autres disciplines et permettent de résoudre des problèmes en situations non didactiques. Son interrelation avec les Sciences Physiques a permis de mettre en évidence certaines situations conflictuelles qui pouvaient être source de difficultés aux élèves à l'appréhension de certaines notions.

Il serait souhaitable que le thème "grandeurs et mesures" soit considéré comme un cadre dans les programmes d'études du Bénin pour qu'une attention particulière lui soit accordée.

Bibliographie

BRONNER, A. et VIGNES, M. (2005) Mesures, nombres et ordres de grandeurs en seconde http://www.inrp.fr/ardist2005/ressources/contributions/52.pdf

CHEVALLARD, Y. (2001). O*rganiser l'étude. Ecologie & régulation,* Acte de la XI[e] école d'été de didactique de mathématique**,** pp. 9-10
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_3.pdf

LEBESGUE, H. (1975), *La mesure des grandeurs*, Librairie A. Blanchard, Paris.

NOIRFALISE, R. (2007), Calculer avec les grandeurs : l'usage des unités dans les calculs*,* Reperes-IREM. N°68,2007, pp. 22-23

WARUSFEL, A. (2009) Descartes R. (1637). *Le livre premier de la géométrie de Descartes* (Traduction de Warusfel A.) https://journals.openedition.org/bibnum/635

Programmes scolaires

Ministère des Enseignements Secondaires-Bénin (2020) Programme d'études et guide d'enseignement. Classe de sixième.

Ministère des Enseignements Secondaires-Bénin (2020) Programme d'études et guide d'enseignement. Classe de cinquième.

Ministère des Enseignements Secondaires-Bénin (2020) Programme d'études et guide d'enseignement. Classe de quatrième.

Ministère des Enseignements Secondaires-Bénin (2020) Programme d'études et guide d'enseignement. Classe de Troisième.

Annexe : Formulations relatives aux grandeurs et mesures dans les classes de 6e, 5e, 4e et 3e

Classe de 6e

Domaines	Secteurs	Thèmes	Sujets d'études
Activités numériques	Fraction	Longueur	Calculer une dimension d'une figure connaissant ses autres dimensions et son périmètre ou son aire.
			Calculer une dimension d'un solide connaissant ses autres dimensions et son volume.
		Grandeurs courantes	Prendre une fraction d'une grandeur donnée
	Application de la proportionnalité	Grandeurs courantes	Calculer une distance parcourue
			Calculer une vitesse
			Calculer un temps
			Changer d'unités de vitesse, m/s et km/h
		Pourcentages	Calculer un pourcentage
			Appliquer un taux de pourcentage
	Statistiques	Vocabulaire des statistiques	Utiliser des mesures des grandeurs comme des modalités
			Calculer la fréquence d'une modalité sous forme de pourcentage
Activités géométriques	Cube et pavé droit	Aire	Calculer l'aire et la surface latérale d'un cube et d'un pavé droit
			Calculer l'aire totale d'un cube et d'un pavé droit
		Volume	Calculer le volume d'un cube et d'un pavé droit
	Segment	Longueur	Tracer un segment de longueur donnée
	Triangle	Longueur	Calculer longueur d'un triangle
		Aire	Calculer l'aire d'un triangle
	Cercle	Longueur	Tracer un cercle connaissant son centre et son rayon
			Calculer la longueur d'un cercle de rayon donné ou de diamètre donné
	Disque	Aire	Calculer l'aire d'un disque de rayon donné
	Angle	Mesure d'angles	Construire à l'aide de la règle et du rapporteur un angle de mesure donnée inférieure à 180°
	Parallélogramme	Longueur	Calculer le périmètre d'un parallélogramme
			Calculer le périmètre d'un parallélogramme particulier
		Aire	Calculer l'aire d'un parallélogramme
			Calculer l'aire d'un parallélogramme particulier

Classe de 5e

Domaines	Secteurs	Thèmes	Sujets d'études
Activités numériques	Nombres décimaux relatifs	Distance	Calculer la distance à zéro d'un nombre décimal relatif
			Utiliser la distance à zéro pour : - comparer deux nombres décimaux relatifs - pour calculer la somme de deux nombres décimaux relatifs
	Application de la proportionnalité	Grandeurs courantes	Calculer une distance parcourue
			Calculer une vitesse moyenne
			Calculer un débit moyen
			Calculer une échelle
			Calculer une masse volumique
			Calculer un pourcentage
			Appliquer un taux de pourcentage

			Traduire un rapport sous forme d'un pourcentage
			Calculer une des trois grandeurs ci-dessous connaissant les deux autres : * masse volumique, masse, volume * vitesse moyenne, distance, durée * échelle ; distance sur carte ; distance réelle
	Statistiques	Vocabulaire des statistiques	Utilisation des mesures des grandeurs comme des modalités
			Calculer la fréquence d'une modalité sous forme de pourcentage
Activités géométriques	Prisme droit	Aire	Calculer l'aire et la surface latérale d'un prisme droit
			Calculer l'aire de la surface de base d'un prisme droit
			Calculer l'aire totale d'un prisme droit
		Volume	Calculer le volume prisme droit
			Calculer à partir de la formule du volume d'un prisme droit une inconnue connaissant les deux autres données
	Segment	Distance	Prendre la distance entre deux points
			Représente un segment de longueur donnée
			Traduction de l'inégalité triangulaire

Classe de 4e

Domaines	Secteurs	Thèmes	Sujets d'études
Activités numériques	Statistiques	Vocabulaire des statistiques	Utilisation des mesures des grandeurs comme des modalités
			Calculer la fréquence d'une modalité sous forme de pourcentage
			Calculer la moyenne d'une série statistique quantitative discrète
Activités géométriques	Triangle rectangle	Distance	Utiliser la propriété de Pythagore pour calculer une longueur d'un côté du triangle rectangle connaissant les deux autres longueurs
			Utiliser les longueurs d'un triangle pour démontrer que le triangle est rectangle (réciproque de la propriété de Pythagore)
	Pyramide et cône de révolution	Aire	Calculer l'aire et la surface latérale d'une pyramide régulière ou d'un cône de révolution Calculer l'aire de la surface de base d'une pyramide régulière ou d'un cône de révolution
			Calculer l'aire totale d'une pyramide régulière ou d'un cône de révolution
		Volume	Calculer le volume d'une pyramide régulière ou d'un cône de révolution
			Calculer l'aire de la surface de base connaissant le volume et la hauteur d'une pyramide régulière ou d'un cône de révolution
			Calculer la hauteur connaissant le volume et l'aire de la surface de base d'une pyramide régulière ou d'un cône de révolution.
	Sphère	Aire	Calculer l'aire d'une sphère
	Boule	Volume	Calculer le volume d'une boule

Classe de 3e

Domaines	Secteurs	Thèmes	Sujets d'études
Activités numériques	Nombres réels	Distance	Calculer la distance entre deux nombres réels
			Calculer l'amplitude d'un intervalle
	Statistiques	Vocabulaire des statistiques	Utilisation des mesures des grandeurs comme des modalités
			Calculer la fréquence d'une modalité sous forme de pourcentage
			Calculer la moyenne d'une série statistique quantitative discrète
Activités géométriques	Triangle rectangle	Distanc*e	Utiliser les relations métriques dans un triangle rectangle pour calculer une longueur connaissant les autres données.
			Calculer la distance entre deux points dont on donne les coordonnées dans un plan muni d'un repère orthonormé
	Angle	Angle inscrit	Comparer deux angles inscrits interceptant le même arc
			Comparer un angle inscrit et l'angle au centre qui interceptent le même arc
	Pyramide et cône de révolution	Aire	Calculer l'aire et la surface latérale d'une pyramide régulière ou d'un cône de révolution
			Calculer l'aire de la surface de base d'une pyramide régulière ou d'un cône de révolution
			Calculer l'aire totale d'une pyramide régulière ou d'un cône de révolution
			Calculer l'aire d'une section plane d'une pyramide régulière ou d'un cône de révolution
			Connaître et utiliser le fait que dans une réduction ou un agrandissement de rapport k, l'aire d'une surface est multipliée par k^2
		Volume	Calculer le volume d'une pyramide régulière ou d'un cône de révolution
			Calculer le volume du tronc d'une pyramide régulière ou d'un tronc de cône de révolution
			Calculer l'aire de la surface de base connaissant le volume et la hauteur d'une pyramide régulière ou d'un cône de révolution
			Calculer la hauteur connaissant le volume et l'aire de la surface de base d'une pyramide régulière ou d'un cône de révolution. Connaître et utiliser le fait que dans une réduction ou un agrandissement de rapport k, le volume d'un solide est multiplié par k^3
	Sphère	Aire	Calculer l'aire d'une sphère
	Boule	Volume	Calculer le volume d'une boule

Analyse du rapport institutionnel relatif à l'activité de modélisation dans la transition primaire collège en Tunisie

Faten Khalloufi-Mouha
Université de Carthage. Tunisie
Sonia Ben Nejma
Université de Carthage. Tunisie
Fadhel Adel
Ministère de l'éducation. Tunisie
Ridha Najar
Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue. Canada

RÉSUMÉ

Ce travail étudie la manière dont le système d'enseignement tunisien prépare les élèves du primaire à l'entrée dans l'algèbre. Nous nous appuyons, d'une part, sur les travaux du courant « Early algebra » et ceux développés dans le cadre de l'Observatoire International de la Pensée Algébrique (OIPA), et d'autre part sur un Modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (MPRPA) élaboré selon la perspective de la théorie anthropologique du didactique. La recherche propose une analyse des activités de modélisation contenues dans les manuels officiels tunisiens de mathématiques des classes de la 6ème année du primaire (11-12 ans) et de la 1ère année du collège (12-13 ans). L'analyse vise particulièrement l'étude du potentiel de ces activités à développer chez les élèves la pensée algébrique. Les résultats montrent que les tâches de résolution de problèmes concrets occupent une place centrale parmi les activités proposées dans les deux manuels, et constituent de ce fait un milieu favorable pour le développement de la pensée algébrique chez les élèves, lors du passage du primaire au collège.

Mots clés : Pensée algébrique, Modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique, Potentiel de développement de la pensée algébrique. Transition primaire/collège.

1. INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

Dans le système d'enseignement tunisien, l'enseignement de l'arithmétique au primaire vise essentiellement le développement des concepts des nombres naturels, des nombres décimaux et des nombres rationnels ainsi que les opérations sur ces nombres. L'apprentissage comporte également les différents types de représentations de ces nombres ainsi que leur utilisation dans la résolution de problèmes contextualisés dans l'objectif de relier les mathématiques à la vie quotidienne. L'initiation des élèves à l'algèbre et au symbolisme algébrique s'opère à partir de la 7ème année de base (1ère année de collège[1]), avec l'introduction explicite du symbolisme algébrique dans l'objectif de préparer les élèves à la manipulation des expressions algébriques et à la résolution d'équations dans le cadre de la résolution de problèmes. Par ailleurs, ce moment charnière de la scolarité obligatoire est caractérisé par l'entrée dans la pensée algébrique et le détachement progressif du mode de pensée arithmétique. De nombreuses recherches en didactique des mathématiques se sont intéressées à cette problématique. Vergnaud, (1988), Filloy et Rojano, (1989) ont longtemps

[1] Élèves de 12-13 ans

développé l'idée d'obstacle épistémologique ou de coupure entre l'arithmétique et l'algèbre qui apparait dans le changement de statut des objets de savoirs (lettres, égalité…) ainsi que des procédures de résolution de problèmes. Le mouvement « Early algebra » inspiré des travaux de Kaput (1998, 2000) remet en question cette approche classique de rupture. Radford, 2014 et 2015, Carraher et al., 2006, Squalli et al 2019 conçoivent l'arithmétique plutôt comme un levier pour développer la pensée algébrique (PA) chez les élèves avant l'introduction du formalisme algébrique. La modélisation est, en effet, l'une des approches fortement préconisée par les curricula actuels pour développer la pensée algébrique dans des cadres mathématiques variés, dans un contexte de résolutions de problèmes concrets ou extra-mathématiques (Ben Nejma, 2020). Ce travail s'inscrit dans la lignée de ces travaux, dans le cadre d'un projet du programme APPRENDRE « Accompagner le développement du cycle fondamental : l'enjeu de la transition école / collège ». (Appel à projet d'avril 2019) mis en œuvre par l'Agence Universitaire de la Francophonie (AUF) avec l'appui de l'Agence Française de Développement (AFD). La recherche s'appuie sur la théorie anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard, 1998) et le modèle praxéologique de référence de la PA (MPRPA) (Squalli, et al. 2019). Quelles sont les caractéristiques des praxéologies de modélisation développées en fin de primaire et au début du collège? Quel est le potentiel des situations d'apprentissage proposées, à développer la pensée algébrique chez les élèves? La transition primaire/collège est-elle accompagnée de continuités, de ruptures au niveau des praxéologies de modélisations développées dans les manuels officiels?

L'objet de cet article est de présenter les principaux résultats relatifs à l'analyse institutionnelle conduite sur la base des programmes et des manuels officiels en vue d'étudier la manière dont l'institution scolaire tunisienne prépare les élèves à l'algèbre lors du passage du primaire au collège.

2. CADRE THEORIQUE DE REFERENCE

2.1 Algèbre. Pensée algébrique

Dans notre travail, l'algèbre est conceptualisé comme un ensemble d'activités mathématiques où interviennent des opérations (lois de composition, internes ou externes, binaires ou n-aires), pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, composition, etc.), mais répétées un nombre fini de fois (Squalli et al., 2020). Dans cette perspective Squalli, et al. (2020) proposent une caractérisation opératoire de la pensée algébrique à travers trois dimensions inter-reliées formant une totalité dynamique : *(1)La dimension conceptuelle* qui concerne la façon d'approcher les concepts en jeu dans les activités algébriques « comme voir l'égalité comme une relation d'équivalence, laisser les opérations en suspens, etc.) » (2) *Les types de raisonnements* spécifiques caractérisant la pensée algébrique « comme généraliser, raisonner de manière analytique, symboliser et opérer sur des symboles ; exprimer, interpréter, raisonner sur des relations entre variables, en particulier des relations fonctionnelles, raisonner en termes de structures, etc.) » (3) *Les modes de représentation et les manières d'opérer sur ces représentations*.

2.2 TAD. Modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique

La TAD permet de modéliser toute activité mathématique en termes de praxéologies (Chevallard, 1998). Selon ce modèle, les pratiques et ressources institutionnelles, relatives à l'enseignement d'un savoir donné, peuvent être analysées par un découpage des pratiques ou du savoir en un système de tâches (*t*), appartenant à des types de tâches (*T*), des techniques τ, décrivant des manières de réaliser les tâches *t*, des technologie θ, justifiant les techniques et des théories Θ, qui donnent les fondements sur lesquels reposent les technologies. L'analyse du savoir à enseigner, ou du savoir enseigné, suppose de s'appuyer sur un modèle de référence issu des recherches réalisées dans le domaine de ce savoir (Larguier et Bronner, 2015). Nous nous appuyons sur le *modèle praxéologique de référence de la* PA (MPRPA) proposé par Najar et al (2021) qui est structuré en trois praxéologies mathématiques régionales (PMR) : Généralisation, Modélisation et Calcul. Chacune de ces PMR se décline en des praxéologies mathématiques locales (PML). Toute PML se déploie en des praxéologies mathématiques ponctuelles (PMP). La figure 1 présente l'architecture du MRPA exploité dans cette étude. La (PMR) « Modélisation », objet de notre article, s'organise en trois (PML) :

M1 : Modélisation de situations intra ou extra mathématiques par des expressions numériques.
M2 : Modélisation de situations intra ou extra mathématiques par des équations.
M3 : Modélisation de situations intra ou extra mathématiques par des relations fonctionnelles.

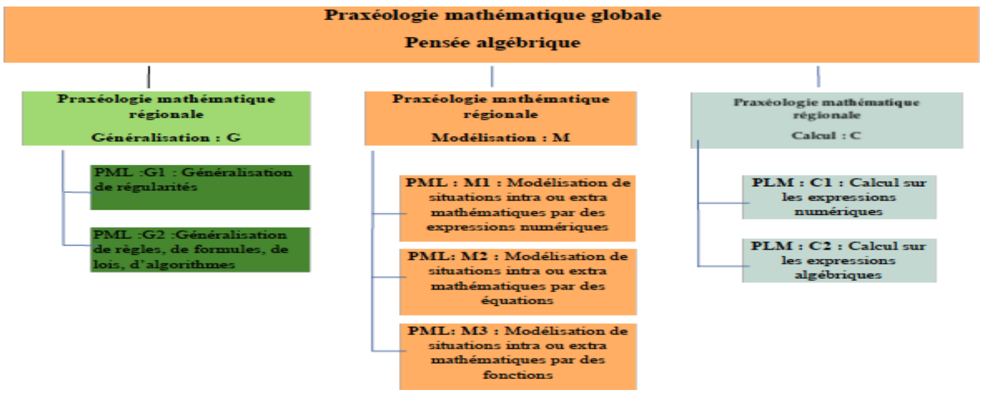


***Figure 1**. Architecture du MPRPA, Najar et al. (2021)*

3. MÉTHODOLOGIE DE TRAVAIL

3.1 Spécificité du contexte tunisien

Le système d'enseignement tunisien comporte deux cycles : l'enseignement de base et l'enseignement secondaire. L'enseignement de base s'étale sur 9 ans et comporte à son tour deux cycles : (1) Le cycle primaire (6-12 ans) : dispensé dans les écoles primaires sur une durée de 6 ans. (2) Le cycle préparatoire (12-15 ans) : dispensé dans les collèges avec une durée de 3 ans. L'enseignement secondaire s'étale sur une durée de 4 ans et s'achève par l'examen national du baccalauréat. Pour chaque classe, du primaire à la fin du secondaire, il existe un manuel officiel unique des mathématiques qui constitue à la fois une ressource pour l'enseignant et un outil de travail pour les élèves.

3.2 Méthodologie d'analyse des pratiques institutionnelles

Dans notre travail, l'analyse des pratiques institutionnelles relatives à la praxéologie modélisation est réalisée à travers l'identification des praxéologies locales et ponctuelles développées dans les manuels officiels de 6$^{\text{ème}}$ année et de 7$^{\text{ème}}$ année de base. La caractérisation de ces praxéologies est réalisée par une analyse des situations d'apprentissages proposées dans ces manuels selon qu'elles renvoient à une modélisation par des expressions numériques, par des équations (mise en équations) ou par des relations fonctionnelles (formules…). Il s'agit d'identifier les types de tâches en jeu selon le MPRPA et leur potentiel à développer la pensée algébrique (PDPA) chez les élèves. Cette notion de potentiel est développée dans le cadre de ce projet comme un outil méthodologique permettant d'identifier dans quelle mesure les types de tâches proposés peuvent conduire à des techniques arithmétiques ou algébriques. Trois niveaux de potentialité ont été considérés : *potentiel algébrique nul* (la réalisation de la tâche repose uniquement sur la qualité nombrante des nombres (leurs valeurs)), *potentiel algébrique faible* (les tâches dont les énoncés encouragent l'utilisation d'une technique arithmétique ou une technique sans calcul direct) et *potentiel algébrique fort* (les tâches dont les énoncés encouragent l'utilisation d'une technique algébrique, ou si une technique algébrique se trouve à la portée de l'élève) (Najar et al., 2021)

Nous menons une analyse a priori des tâches proposées dans les manuels en vue d'identifier leur PDPA, e fonction des techniques permettant de les accomplir. Ce potentiel peut varier selon le statut des activités proposées (découverte, application exercices), c'est pourquoi, nous analysons les situations d'apprentissage dans leur globalité pour en tirer les conclusions sans nous limiter aux activités de découverte.

4. Analyse des pratiques institutionnelles relatives à la praxéologie modélisation en 6ème année de base

L'analyse des situations proposées dans le manuel de 6ème année primaire (Ben Nejma et al 2022) selon le modèle praxéologique MPRPA fait apparaitre l'importance de la proportion des activités associées à la PMR « Modélisation » qui constituent 64,2% de l'ensemble des activités proposées dans le manuel. Cette grande importance constitue une conséquence du choix institutionnel basé sur l'utilisation de l'approche par compétence qui privilégie le lien de l'apprentissage des mathématiques avec des situations concrètes afin de donner un sens aux différents concepts mathématiques introduits. Dans cette perspective, les situations problèmes et les problèmes de modélisation sont au cœur de l'apprentissage des mathématiques et leur résolution constitue la l'objectif principal de l'enseignement des mathématiques au primaire. À ce propos, le programme officiel précise :

> La manipulation des « situations problèmes » qui consiste à la résolution des problèmes reste au cœur des mathématiques et l'objectif principal de l'enseignement au niveau des outils et des procédures[2]. (Programmes officiels du troisième degré de l'enseignement de base. p.94)

L'analyse des situations du manuel relatives à la praxéologie régionale « Modélisation » a permis de répartir ces activités selon les trois PML proposés dans le MPRPA. La répartition des tâches selon les PML M1, M2 et M3 (Cf Figure 1) est donnée dans le tableau 1 suivant :

PML	M1	M2	M3	Total
Effectif	171	21	11	203
Pourcentage	84,2%	10,3%	5,5%	100%

Tableau 1*. Répartition des PML M1, M2 et M3 dans le manuel des mathématiques de la 6ème primaire*

Cette répartition fait apparaitre l'importance des activités associées à la PML : M1. Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des expressions numériques. Bien que la résolution de ce type d'activité soit généralement associée à la mise en place de la part des élèves de stratégies de type arithmétique, nous considérons que leur PDPA peut varier d'une activité à l'autre et dépend également de leur position au niveau de l'organisation didactique : s'il s'agit d'une activité de découverte, d'application ou d'intégration. Ce potentiel se traduit par la possibilité de mobiliser une pensée du type algébrique dans le cadre de la résolution de ces situations, et ce à travers la

[2] Traduction libre du texte d'origine, écrit en langue arabe.

considération de l'inconnue et l'opération sur cette inconnue, comme sur les données connues. Les situations associées à la PML :M1, constituent 84,2% (171 parmi les 203 situations de modélisation proposées dans le manuel). Parmi ce type de situations, le nombre de situation de favorisant le recours à une technique algébrique et non à une technique arithmétique, constitue 130 parmi les 171. Ce qui permet de considérer ce type de situations comme un habitat possible pour la pensée algébrique par l'initiation des élèves à des compétences de type algébrique. Dans ces situations, généralement, on demande explicitement dans l'énoncé de trouver le résultat de deux manières différentes. Cela permet, à travers l'égalité des expressions numériques modélisant la situation, de faire apparaitre les propriétés de commutativité et d'associativité de la multiplication et de l'addition des entiers naturels ou des nombres décimaux ou rationnels, ainsi que la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et la soustraction. Le recours à ces règles algébriques de transformation des expressions numériques signe un potentiel algébrique qui n'est pas nul. On peut le qualifier de faible.

Les analyses font également apparaitre la quasi-absence de tâches appartenant à la PML M2 : « Modélisation de situations intra ou extra mathématiques par des équations », ainsi que le nombre très réduit des activités associées à la PML M3 « Modélisation de situations intra ou extra mathématiques par des relations fonctionnelles », qui se traduisent par un usage implicite du concept de variable, non pas à travers le concept de fonction, mais à travers le concept de formule, et en particulier l'utilisation des grandeurs géométriques pour modéliser des situations contextualisées par des expressions littérales. Pour la PML M2, seuls les genres de tâches du type « Résoudre une situation extra-mathématique se modélisant par une équation » sont représentées dans le manuel avec six activités ayant un potentiel algébrique fort. En fait, ces activités favorisent le recours à des techniques algébriques et constituent, ainsi, une occasion pour opérer sur l'inconnue comme sur les données connues, à travers la modélisation de la situation contextualisée sous forme d'une équation qui traduit la relation entre l'inconnue et les données du problème, et cela sans faire nécessairement appel à un symbolisme algébrique. La faible représentation de la PML M2, s'explique par l'absence de la notion d'équation comme objet d'enseignement au niveau de la 6ème année du primaire. Seules les opérations à trous sont présentes à ce niveau et peuvent constituer une initiation à la notion d'équation. Le nombre très réduit d'activités de la PML M3 « Modélisation de situations intra ou extra mathématiques par des relations fonctionnelles » revient également au fait que la notion de fonction et l'idée de variable ne constituent pas un objet d'enseignement à ce niveau scolaire. En fait, cette praxéologie se déploie à travers des activités d'application de formules, ce qui constitue une première entrée dans le calcul littéral dès l'enseignement primaire.

Nous illustrons dans la suite notre classification des activités selon les types de tâches relatifs à la PMR « Modélisation » par des activités proposées dans le manuel officiel de 6ème année primaire, en justifiant cette classification ainsi que l'interprétation du PDPA[3].

[3] Pour chacune des activités présentées, nous donnons la version d'origine extraite du manuel, accompagnée de notre traduction.

PML : M1 Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des expressions numériques

10) ذهب أنيس وسلمى ونادر إلى متجر والدهم فاغتنموا فرصة وجود ميزان كبير وصعد ثلاثتهم عليه فكانت كتلتهم معًا بالكغ 126,75. نزلت سلمى وبقي أنيس ونادر فوق الميزان فكانت كتلتهما معا بالكغ 88,25. صعدت سلمى من جديد فوق الميزان ونزل أنيس فكانت كتلة سلمى ونادر معا بالكغ 81,25. ■ أحدّد كتلة كلّ طفل من الأطفال الثّلاثة بالكغ.	Anis, Salma et Nader se sont rendus dans la boutique de leur père et ont saisi l'occasion de l'existence d'une grande balance pour y montrer tous les trois. Le poids global en kg a été de 126,75. Salma est descendue et Anis et Nader sont restés sur la balance, leur poids ensemble en kg a été de 88,25 kg. Salma est remontée de nouveau sur la balance et Anis est descendu, Le poids de Salma et Nader ensemble a été 81,25. Déterminez le poids chacun des trois enfants en kg.

Figure 2. *Exemple 1 (Exercice 10 p. 7)*

La situation proposée dans cet exercice, met en jeu trois inconnues qui correspondent aux poids respectifs des trois enfants. La détermination de chacune de ces inconnues est possible en opérant uniquement sur les données et les relations connues. Ce qui permet de classer le problème parmi les problèmes connectés. Les élèves peuvent procéder par une schématisation en segments des trois relations données ou procéder directement par des opérations de soustraction à partir des sommes globales explicitées dans l'énoncé (la détermination du poids de Salma à partir des deux relations données (A+S+N=126,75 et A+N=88,25), ainsi le poids de Salma est la différence entre 126,75 et 88,25. Une fois le poids de Salma déterminé, la troisième relation (S+N=81,25) permet de déduire à l'aide d'une soustraction le poids de Nader. La dernière inconnue peut être directement déterminée à partir de la deuxième ou la première relation. Nous pouvons classer cette tâche parmi les praxéologies mathématiques régionales « M » et plus particulièrement parmi les praxéologies mathématiques locales « M1 » puisque cette modélisation s'appuie sur une mise en relations numériques des données et la détermination de l'inconnue qui n'est pas nécessairement symbolisée par l'opération inverse de l'addition. De cette situation la technique attendue est de nature arithmétique, selon un raisonnement arithmétique. Cependant, l'existence de plusieurs inconnues et de plusieurs relations permet d'initier les élèves à la mise en équations sans pour autant mettre en œuvre le formalisme algébrique associé plutôt à travers d'autres représentations sémiotiques dans un registre intermédiaire. Nous considérons que cette situation d'apprentissage permet de développer chez les élèves un raisonnement de nature algébrique d'où le degré faible conféré à cette tâche.

PML : M2 Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des équations

8) لمواطن قطعة أرض مستطيلة الشّكل مجموع بعديها بالم 40,25 و الفرق بينهما بالم 4,75. بنى عليها منزلا قيس مساحته بالمتر المربّع 162,5. ■ أبحث بطريقتين مختلفتين عن بعدي هذه القطعة بالمتر. ■ ما قيس المساحة المتبقّية للحديقة ؟	Un citoyen possède un terrain rectangulaire dont la somme de la longueur et de la largeur en m est 40,25 et la différence entre les deux est de 4,75m. Il construit sur ce terrain une maison dont la surface en m^2 162,5. *Déterminez de deux manières la longueur et la largeur du terrain en mètre. *Quelle est l'aire de la surface restante pour le jardin?

Figure 3 – *Exemple 2 (Exercice 6 p. 8)*

Cette situation d'apprentissage est extraite du premier chapitre du manuel officiel intitulé : « J'utilise l'addition et la soustraction dans l'ensemble des nombres décimaux » qui vise le renforcement des connaissances acquises en 5^{è} autour des opérations élémentaires et des formules d'aires de figures géométriques classiques. La première tâche s'organise autour de la détermination de deux inconnues « la longueur » et « la largeur » du terrain. La modélisation du problème peut se ramener à une mise en équations qui n'est pas forcément illustrée par un symbolisme algébrique telles que « longueur + largeur = 40,25 et longueur – largeur = 4,75) qu'on peut aussi symboliser par $L + l = 40{,}25$ et $L - l = 4{,}75$ ou encore formulé dans un registre intermédiaire via des segments …). Cependant, la tâche proposée nécessite l'opération sur l'inconnue. De ce fait le problème proposé est de nature déconnecté et fait partie de la praxéologie mathématique locale M2. La technique permettant d'accomplir ce type de tâche s'appuie sur la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues qui n'est pas disponible chez les élèves du niveau de 6ème année. Dans ce cas, le registre sémiotique mobilisé peut les aider à modéliser le problème, par exemple l'utilisation d'une représentation segmentaire des relations données ou encore le registre de la langue naturelle. Par ailleurs le problème posé nous semble posséder un PDPA fort. La deuxième tâche demandée dans cette situation, nécessite l'utilisation de la formule de l'aire d'un rectangle puis l'instanciation avec les deux valeurs déterminées dans la question précédente puis opérer directement sur la valeur trouvée pour déterminer l'aire de la surface du jardin. La mobilisation de cette formule est susceptible de favoriser l'initiation des élèves à l'idée de variable.

5. ANALYSE DES PRESCRIPTIONS OFFICIELLES RELATIVES À LA PRAXÉOLOGIE MODÉLISATION EN 7ÈME DE BASE

Pour la septième année de base, la tâche prescrite est dévoilée à partir du programme et du manuel. Tout comme en 6ème année, une place importante est accordée à la résolution de problèmes en 7ème année. En effet, plus que la moitié des tâches du manuel (263 parmi 485) renvoient à des tâches de modélisation. La répartition des tâches selon les trois PML associées à la PMR « Modélisation » est synthétisée dans le tableau suivant :

PML	M1	M2	M3	Total
Effectif	190	16	57	263
Pourcentage	72,2%	6,1%	21,7%	100%

Tableau 2. *Répartition des PML M1, M2 et M3 dans le manuel de 7e de base*

L'analyse montre que les types de tâches associés à la PML M1 : « Modélisation de situations intra ou extra mathématiques par des expressions numériques », sont les plus fréquents. Nous illustrons la classification des situations selon les trois PML, M1, M2 et M3 par des extraits du manuel officiel de 7ème année de base[4], selon le MPRPA et le degré du PDPA. Notons que, comme pour le manuel de 6ème année primaire, nous considérons que le PDPA.

M1 : Modélisation d'une situation intra ou extra-mathématique par une expression numérique :

Dans la situation ci-contre, le colis vert pèse 35 kg, le colis jaune pèse moins de 10 kg et la balance peut peser seulement des poids entre 15 kg et 100kg.
Ahmed cherche à connaitre le poids du colis jaune en ayant seulement cette balance à disposition.
Donner un exemple illustratif.

Figure 4 *– Exemple 1 (Exercice 7 p. 25)*

[4] Pour chacune des situations présentées, nous donnons la version d'origine extraite du manuel, accompagnée de notre traduction.

La situation présentée est extraite du chapitre intitulé « Nombre entiers naturels » et s'inscrit dans la PML M1. Elle s'organise autour des propriétés et des opérations sur les entiers naturels. Il s'agit plus, précisément d'introduire implicitement la notion d'inconnue dans un contexte concret. *Le poids du colis en jaune* renvoie à l'inconnue à chercher via des relations additives entre des valeurs connues. À ce moment de la scolarité les élèves n'ont pas encore rencontré la notion d'inconnue ni le processus de mise en équation. Ils sont, ainsi, amenés à mettre en œuvre l'opération inverse de l'addition qui pourrait se traduire dans le registre algébrique par la propriété : « a+b = c signifie b=c-a ou a=c-b). Ces égalités seront exprimées dans le registre numérique

La résolution de cette situation passe par la recherche du *poids des deux colis ensemble* (en les pesant ensemble avec la balance), puis à retrancher celui du colis vert qui est une donnée connue. L'élève pourrait traduire sa technique dans le registre du langage naturel, par exemple, : *le poids du colis jaune* est égal au *poids des deux colis ensemble* moins le poids du colis vert. *Si le poids des deux colis* est 40 kg, alors le poids du colis jaune cherché est 40-35=5kg. Notons que la valeur correspondante au poids des deux colis dans l'exemple ne peut atteindre 45 Kg, mais étant donné le domaine de validité (IN), la valeur maximale de ce poids est de 44 kg. La tâche proposée consiste à trouver une quantité inconnue (*le poids du colis jaune*) pouvant prendre plusieurs valeurs, selon le poids des deux colis ensemble fixé par l'élève. De ce fait, la manipulation d'expressions numériques équivalentes pour réaliser la tâche, nous amène à considérer que le PDPA de cette situation est fort. La tâche pourrait également représenter une occasion pour exprimer les deux égalités, mises en œuvre, dans le registre verbal, comme initiation au registre symbolique.

M2 : Modélisation d'une situation intra ou extra-mathématique par une équation

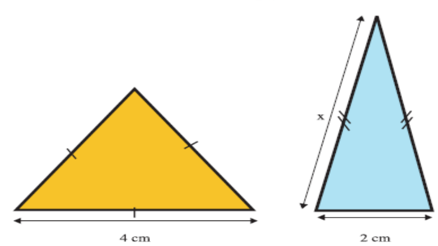
Déterminer la valeur de x sachant que les deux triangles ont la même mesure du périmètre.	حدّد قيمة x إذا علمت أنّ المثلثين أسفله لهما نفس المحيط. 

Figure 5 *– Exemple 2 (Exercice 10 p. 113)*

Cette situation est extraite du chapitre « Activités algébriques » et s'inscrit dans la PML M2. Elle vise l'introduction des équations de premier degré par la modélisation d'un problème géométrique. L'un des objectifs de ce type de tâche est de montrer la puissance et l'utilité de l'outil « équation » et également de montrer que les équations rencontrées dans ce chapitre peuvent avoir un sens associé à des situations réelles. Pour résoudre cette tâche, l'élève peut commencer par formuler les expressions du périmètre de chacun des deux triangles. Le triangle équilatéral a pour périmètre : 3×4 cm = 12 cm. Le triangle isocèle a pour périmètre : ($2x$+2) cm. Étant donnée l'égalité des deux périmètres, nous obtenons l'équation suivante qui modélise la situation : $2x+2=12$. Pour résoudre l'équation, on peut procéder comme suit : $2x+2=12$ signifie $2x=12-2$ signifie $2x=10$ signifie $x=5$. D'où la valeur de x est 5 cm. Le modèle mathématique et le registre de formulation sont ici imposés par la tâche. Cette tâche étant proposée pour initier les élèves à la notion d'équation via une modélisation qui n'est pas prise en charge par l'énoncé, nous la considérons comme ayant un PDPA fort.

6. CONCLUSION

En 6ème année de base, l'algèbre et les techniques algébriques ne constituent pas un objet d'enseignement explicite, cependant le contenu visé décrit dans les programmes et traduit à travers les situations proposées dans le manuel, laisse entrevoir que les situations de résolution de problèmes et les situations de calcul renferment une certaine potentialité à développer la PA et peuvent constituer un habitat pour l'initiation des élèves à la PA. L'analyse des situations montre que la modélisation est une praxéologie centrale pour initier les élèves à la PA. Les situations de résolution de problèmes contextualisés renvoient dans la plupart des cas à la PMR « Modélisation ».

En 7ème année de base, les occasions de développement de la PA dans le manuel scolaire sont multiples. La PMR « Modélisation » occupe une place centrale dans le manuel, avec 54% de l'ensemble des tâches proposées dans le manuel. Cela pourrait s'expliquer par le fait que les situations algébriques constituent un thème d'étude explicite en fin d'année via le calcul littéral et la résolution des équations du premier degré à une inconnue. L'objectif est d'initier les élèves à la mise en équations dans des contextes variés. La plupart des tâches du type M1 concernent la modélisation de situations par des expressions numériques mobilisant les propriétés des opérations sur les nombres entiers. Leur PDPA dépend de leur fonction dans l'organisation didactique des thèmes d'étude. Toutefois, le degré de ce PDPA est souvent fort car la plupart des tâches proposées sont investies pur une introduction et une applications formules ou de propriétés (cas de l'exemple 1). Pour les tâches du type M2 : « Modélisation de situations intra ou extra mathématiques par des équations », malgré qu'elles soient faiblement représentées (6% des tâches de modélisation), leur PDPA est généralement fort. Ces tâches jouent un rôle important pour le développement de la pensée algébrique. Les tâches du type M3 : « Modélisation de situations intra ou extra mathématiques par des relations fonctionnelles », contrairement au cas de la 6ème année du primaire, sont suffisamment représentées en 7ème année, avec une fréquence de 21% de l'ensemble des tâches de modélisation. Leur PDPA dépend de leur fonction dans l'organisation didactique des moments de l'étude. Cela pourrait s'expliquer, entre autres par le fait que les domaines d'études consacrés à la géométrie et la statistique offrent des occasions pour mobiliser des graphiques et des formules permettant d'appréhender des aspects fonctionnels, comme une voie d'accès à la PA (Ben Nejma, 2020)

En guise de conclusion, les situations de modélisation proposées dans les manuels officiels de la dernière année du primaire et de première année du collège constituent un milieu favorable pour le développement de la pensée algébrique. Dans cette transition institutionnelle les situations de modélisation proposées sont intéressantes à exploiter puisqu'elles montrent un potentiel algébrique souvent fort à développer la pensée algébrique tout en assurant une certaine continuité des apprentissages. Toutefois, l'exploitation de ce PDPA reste tributaire des pratiques d'enseignement et de formation des enseignants du primaire et du collège si l'on veut initier les élèves à l'algèbre bien avant l'utilisation de la lettre.

BIBLIOGRAPHIE

BEN NEJMA, S. (2020) Exploitation de l'histoire dans une analyse didactique du développement de la pensée fonctionnelle au début de l'enseignement secondaire tunisien. Revue Québécoise de didactique des mathématiques. RQDM- Vol 1, (PP 38-69)

BEN NEJMA, S., Abouhanifa S, Eugène O, Najar R, Squalli H, Adihou A (2022). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : analyse du savoir à enseigner relatif au développement de la pensée algébrique dans les manuels de 6ème année primaire. Revue québécoise de didactique des mathématiques. Numéro thématique 2 (Tome 1), p. 59-95.

CHEVALLARD, Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique. Actes de l'université d'été de la rochelle, juillet 1998 (p. 1-29).

CARRAHER, D. W., SCHLIEMANN A. D., BRIZUELA B. M. et EARNEST D. (2006) Arithmetic and algebra in early mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education, 37(2), 87-115.

FILLOY E., ROJANO T. (1989) Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. For the Learning of Mathematics, 9(2), 19-26. Glaeser (1999)

KAPUT J. (1998) Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by 'algebrafying' the K-12 Curriculum. In The nature and role of algebra in the K-14 curriculum (pp. 25–26). Washington: NCTM and the Mathematical Sciences Education Board, National Research Council.

KAPUT J. (2000) Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power By "Algebrafying" the K-12 Curriculum. Paper from National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 441 664).

LARGUIER, M., & BRONNER, A. (2015). Première rencontre avec l'algèbre. In Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage–Actes du colloque EMF2015 (pp. 313-333).

NAJAR, R., SQUALLI, H., ADIHOU, A. et ABOUHANIFA, S. (2021). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : Pour un état des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre, ITM Web of Conferences 39, 01004 CIFEM'2020

RADFORD, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. Mathematics Education Research Journal, 26(2) (pp. 257-277).

RADFORD, L. (2015) Pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation, Actes EMF2015 – GT3.

SQUALLI, H., JEANNOTTE, D., KOUDOGBO, J. & ROBERT, V. (2019). Analyse du potentiel du développement de la pensée algébrique dans le programme de formation de l'école québécoise. Communication presented dans Working group 3: Teaching for connections and understanding. CIEAEM-71, Braga, 22 - 26 juillet 2019

SQUALLI, H., LARGUIER, M., BRONNER, A. & ADIHOU, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22(1), 36–62. https://doi.org/10.7202/1070024ar

VERGNAUD, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. En: C. Laborde (Ed.) Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'informatique, (pp. 189-199), Grenoble: La Pensée Sauvage.

Les mathématiques sont aussi des faits de langue(s). Comment comptons-nous dans nos langues ?

Ana MESQUITA
IREM de Paris
Manuel Célio CONCEIÇÃO
Universidade do Algarve / CIAC
Safia ACHER-SPITALIER
Association des Professionnels de l'Éducation et de l'Enseignement, Bordeaux
Hawa COULIBALY-TOGORA
Institut Pédagogique Universitaire, Mali
Paulino FUMO
Université Pédagogique de Maputo, Mozambique,
Tasos PATRONIS
Université de Patras
Kallia PAVLOPOULOU
Université Nationale de Technologie d'Athènes

RÉSUMÉ

Le cloisonnement disciplinaire des savoirs et une conception stricte de la langue en tant que système de codification sans rapport avec les processus sociocognitifs de leur construction et dissémination est peut-être à la source de nombreuses difficultés entre les mathématiques et les langues utilisées par les élèves ou les enseignants. Dans cette communication, nous nous centrons sur la numération et le comptage, parties essentielles des mathématiques et de leur enseignement, et en particulier sur certains aspects mathématiques, linguistiques, sémantiques, culturels et terminologiques le concernant. Nous y analysons des aspects du comptage dans ces langues, en mettant en évidence des particularités et des régularités, ainsi que des propriétés y associées, dans les langues suivantes, africaines ou européennes : arabe, bamanankan (bambara), grec et ronga ; une comparaison sommaire entre le français et le portugais est également proposée.

1. INTRODUCTION

La division épistémologique des deux cultures (plus ou moins artificielle, telle que l'a posée Snow en 1959), est probablement à la base d'un problème contemporain de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Le cloisonnement disciplinaire des savoirs et une conception stricte de la langue en tant que système de codification sans rapport avec les processus sociocognitifs de leur construction et dissémination sont aussi des arguments d'une justification de l'écart entre mathématiques et langues. Un des problèmes récurrents dans cet enseignement /apprentissage est la difficulté de compréhension des énoncés linguistiques d'un grand nombre d'élèves ce qui les empêchent d'accéder aux aspects conceptuels et aux savoir mathématiques (Gunther et al., 2020). N'acceptant pas cette division entre deux cultures, nous postulons donc que les mathématiques sont aussi des faits de langue et nous observons ici particulièrement les questions de numération et les processus de comptage dans différentes langues. En effet, les connaissances se construisent dans/par les langues et surtout par les processus qui émergent de l'utilisation en contextes précis. Les dénominations des concepts obéissent à des structurations cognitives socioculturellement déterminées et se mettent en scène en discours suivant les consignes et les besoins communicatifs. Les études terminologiques mettent en exergue les rapports entre les concepts/les savoirs et leurs présences discursive et communicative qui leur attribuent une valeur sociale.

La numération est un enjeu majeur dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Elle occupe une place substantielle parmi ce qui est enseigné et devrait être appris dans la culture mathématique scolaire et dans le curriculum en général. Dans le cadre d'un travail entre linguistiques et didacticiens des mathématiques[1], nous nous intéressons à la numération et au comptage dans différentes langues naturelles, et aux particularités que l'on peut y observer[2]. Il s'agit, dans cette phase, d'une réflexion théorique appuyée sur une analyse de caractéristiques du comptage dans certaines langues. Nous avons pu nous centrer sur des langues, telles que l'arabe, le bamanankan (également connu par bambara), le français, le grec, le portugais, le wolof, le ronga. Notons que ces langues sont pratiquées en des pays/régions plurilingues, même si à des degrés assez différents.

Ce travail s'insère dans une préoccupation plus générale, celle de la conceptualisation et de son lien à la qualité et à l'utilisation des représentations sémiotiques, au sens de R. Duval (1995), d'une part, et d'autre part, à l'importance de la maîtrise effective d'une langue, maternelle ou non, dans cette conceptualisation. C'est dans ce sens que des linguistes et terminologues se mobilisent, depuis déjà longtemps. L'actualisation convenable des terminologies utilisées dans les langues vivantes y prend une place centrale (M.C. Conceição, 2016, Cf. Annexe 1).

La théorie des registres développée par R. Duval (1995) nous permet d'analyser les particularités et les spécificités du comptage. Rappelons que pour cet auteur, les registres – le terme en est issu de la musique – sont des systèmes sémiotiques d'expression et de représentation des connaissances : le **langage naturel**, des **langages symboliques** (concernant des notations symboliques de divers ordres, systèmes variés d'écritures numériques, écritures algébriques et logiques), ainsi que des **images** (de différents types, des figures géométriques aux diagrammes, schémas, etc) sont des exemples de tels registres. Il s'agit d'essayer de cerner le fonctionnement cognitif de la pensée, sachant aussi que chaque représentation différente d'un même objet (d'une même quantité, par exemple) apporte des informations spécifiques et impose des opérateurs de conversion entre registres sémiotiques (langage numériques et/ou symboliques et langue naturelle/discours, par exemple).

Les mathématiques sont indissociables des langues naturelles sur lesquelles elles se basent ; mais ces langues ne sont pas organisées de la même façon, et dans plusieurs contextes multilingues (la

[1] Dans le cadre Séminaire de Communication de la Science, du Centre de Recherches en Arts et Communication (CIAC) de l'Université d'Algarve (Portugal) dirigé par Manuel Célio Conceição. Les Séminaires autours du titre « Les Maths sont aussi des faits de Langues » sont co-dirigés par Ana Mesquita et ont surgit après des contacts établis par Maria Helena Carreira (professeur émérite de l'Université Paris 8). Par ailleurs, les Télé-Séminaires des IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), en France, ainsi que GREMA (Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques en Afrique), de l'IREM de Paris et la Commission Internationale des IREM, s'intéressant également à ces thématiques, nous ont donné la possibilité d'échanges fructueux.

[2] Ce que nous présentons ici est issu d'un séminaire sur la même thématique, réalisé par plateforme digitale, en juillet 2021, avec la participation de linguistes et de didacticiens des mathématiques, et dont les actes sont en cours de préparation.

plupart, il y a de moins en moins de contextes scolaires monolingues) les enfants sont confrontés à deux voire trois langues naturelles dans les enseignements. Par exemple, dans les pays du Maghreb, - même si des différences au long du temps et des changements institutionnels ont été observées - les élèves peuvent côtoyer plusieurs langues : l'**arabe (classique, littéraire** ou **standard**, (langue officielle), l'**amazigh** ou **tamazight** (langue officielle dans certains pays, dont le Maroc, leur désignation pouvant varier d'un pays à l'autre) l'**arabe dialectal,** variable d'un pays à l'autre, parlé en famille et parmi les populations, parfois aussi à l'école, et le **français**. Notons que cette situation existe en beaucoup de pays, par le biais des migrations, et des mobilités par exemple. Au Portugal ou en France peu d'étudiants sont monolingues, et la plupart ont des répertoires linguistiques très riches ou souvent leur première langue n'est pas la langue de scolarisation. L'intensité du phénomène peut varier, les langues support aussi, mais le plurilinguisme des individus, dans un contexte multiculturel et multilingue, est bel et bien un fait de société, actuellement.

La numération est un domaine des mathématiques où la théorie des registres sémiotiques (Duval, idem) nous donne un cadre d'analyse très pertinent. En effet, nous pouvons distinguer dans le comptage différents aspects : d'une part, l'**énonciation orale** : je dis *'quatre' 'vingts'*, par exemple, en langue naturelle ; d'autre part des **écritures,** où on peut distinguer des **écritures chiffrées** : j'écris *'80'*, en utilisant des chiffres arabes, ou ***'****LXXX'* en chiffres romains – plusieurs écritures numériques sont possibles –, ou une **écriture littérale** : j'écris *'quatre-vingts'* (en français), ou 'oitenta' (en portugais), dans l'exemple en question. En ce qui concerne les écritures, deux registres sont bien présents, un registre de langage naturel (la langue naturelle qui est utilisée), et un registre symbolique, numérique (où différents systèmes d'écriture peuvent être utilisées, parfois en concomitance).

Ce travail observe des procédés et des mécanismes de numération et de comptage en quelques langues. Ce n'est pas, dans l'état actuel de nos réflexions, une étude didactique, mais un questionnement, une analyse a priori ayant des visées, certes, didactiques, sur les liens entre la comptine numérique et la langue dans laquelle elle s'exprime. Des études didactiques pourraient se suivre à ce questionnement.

Par ailleurs, l'origine des **désignations** utilisées pour nommer les nombres, les liens entre les désignations des nombres et les opérations arithmétiques qui les sous-tendent sont ici esquissées, du moins dans certains cas. Ces désignations nous semblent des antécédents importants pour comprendre la comptine numérique dans chaque langue, en anticipant, par le biais de cette analyse, d'éventuelles difficultés d'élèves en les utilisant.

2. DES PROCÉDÉS ET DES MÉCANISMES DE NUMÉRATION ET DE COMPTAGE

2.1. Le cas de l'arabe standard[3] en Algérie : un croisement de savoirs disciplinaires

Dans le système éducatif algérien, la langue de l'école est la langue arabe[4] dans sa version standard. Elle est aussi la langue de l'enseignement des mathématiques. La spécificité du texte mathématique est sa composition de phrases de langue d'enseignement dans laquelle viennent s'insérer des termes ou des expressions de lang~~a~~ge symbolique, dont l'écriture numérique, qui s'écrivent de gauche à

[3] Il s'agit de la version moderne de l'arabe littéraire, lequel fût introduit au XIXe siècle, après la chute de l'empire ottoman.

[4] L'arabe standard n'est pas la langue première des apprenants Algériens.

droite. Dans notre cas, la langue arabe de l'école s'écrit de droite à gauche, comme nous l'illustrons ci-dessous :

43 + 25 = : أنجز (effectue)

2.1.1 Quelques spécificités de la langue arabe

C'est une langue sémitique, une langue à déclinaisons, en ce sens que la fin du mot change, varie, selon sa position dans la phrase et sa fonction grammaticale (nom, sujet, COD, COI, etc.).
Elle s'écrit de droite à gauche et possède deux formes de phrases : la phrase nominale qui commence toujours par un nom et la phrase verbale qui commence toujours par un verbe.
Dans la langue arabe, on distingue le **singulier**, le **pluriel** et le **duel**.
Le duel est pour désigner deux choses, deux personnes ou deux nombres. Il se forme par l'ajout d'une terminaison au nom singulier. Cette terminaison varie selon les cas de déclinaisons de grammaire (cas sujet, cas direct, cas indirect, par exemple).
« Deux » n'apparaît pas pour désigner deux quantités, deux personnes, deux choses … – c'est la forme de duel qui va prendre en charge la quantité respective, en fonction de la position grammaticale dans la phrase.

Exemples. *Le cas du duel en arabe*

Singulier : un livre كتاب

Kitaboun

Duel : deux livres كتابين كتابان

Kitabayni Kitabani

(Cas direct et indirect) (Cas sujet)

En langue arabe, la numération est caractérisée par l'addition, la multiplication, ainsi que par la composition des deux. Une certaine régularité est observée au passage entre les dizaines, les centaines… sauf quelques exceptions.

واحد	اثنان	ثلاثة	أربعة	خمسة	ستة	سبعة	ثمانية	تسعة	عشرة
un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf	dix
wahidoun	ithnani	thalathatoun	arba'atoun	khamsatoun	sittatoun	sab'attoun	thamaniatoun	tis'atoun	acharatoun

Tableau 1. *La comptine numérique en arabe - de 1 à 10*

Chacun de ces nombres a son nom spécifique. Tous se terminent par « oun », sauf le deux. Les nombres de 11 à 19 se forment en commençant par le chiffre des unités, suivi d'une forme associée aux termes de 10.
Le nombre 12 s'écrit et se vocalise de la façon suivante :

إثنا عشر

achar ithna

(dix) (deux)

Les mots-nombre à partir de la dizaine se basent sur le chiffre multiplicateur correspondant au suffixe en « oun, ون ».
Notons le cas exceptionnel du 10, pour lequel deux variantes sont admises, avec et sans « oun »

(Cf. tableaux 1 et 2).

Dix	vingt	trente	quarante	cinquante	soixante	soixante - dix	quatre-vingt	quatre-vingt-dix
عشر	عِشْرُونَ	ثَلاثُونَ	أَرْبَعُونَ	خَمْسُونَ	سِتُّونَ	سَبْعُونَ	ثَمَانُونَ	تِسْعُونَ
achara	ichroun	thalathoun	arbaoun	khamsoun	sittoun	sab'oun	thamanoun	tiss'oun

Tableau 2. *La comptine numérique en arabe à partir de 10*

Entre chaque dizaine, la lecture se forme en débutant par le chiffre de l'unité, la conjonction de coordination « et » (wa,و) à caractère additif, suivie par celui des noms de la dizaine.

Le nombre 52 s'écrit et se prononce : خَمْسُونَ و إِثْنَانِ

khamsoun wa ithnani

cinquante et deux

2.1.2 Marques de déclinaison du duel

Le duel se décline en deux cas : le cas sujet par l'ajout de « ani; انِ », et le cas direct et indirect par l'ajout de « ayni; يْنِ » à la fin du nom singulier correspondant.

Cas sujet	ولدانِ waladani Deux garçons	بنتانِ bintani Deux filles	إثنانِ ithnani Deux	مِئتانِ mi'atani Deux cents	ألفانِ alfani Deux milles
Cas direct / Cas indirect	ولديْنِ waladayni Deux garçons	بنتيْنِ bintayni Deux filles	إثنيْنِ ithnayni Deux	مِئتيْنِ mi'atayni Deux cents	ألفيْنِ alfayni Deux milles

Tableau 3. *Déclinaisons du duel en fonction des cas grammaticaux utilisés*

De ce fait, la phrase suivante n'a pas de sens en langue arabe :

ولد إِثْنَانِ

(garçon) (deux)

Pourtant, elle renvoie à « deux » en tant que nombre cardinal !
Le duel, dans ses différents cas de déclinaisons, met ainsi en évidence de façon explicite l'imbrication des savoirs spécifiques à la langue arabe, des savoirs spécifiques aux mathématiques, et la nécessité de ces savoirs les uns pour les autres.

2.2 Des noms de personnes aux noms de nombres : le cas du bamanankan.

Dans cette langue, une des langues de la grande famille linguistique mandingue, parlée par plus de 10 millions de personnes en Afrique, langue majoritaire au Mali, les noms de personnes traduisent aussi des noms de choses. Cette influence est spécialement visible dans le cas de la numération *(Cf. en Annexe 2 une liste de nombres en bamanankan). Kelen (un)*, *Fila (deux)*, *Saba (trois)*, étaient des noms donnés aux enfants. Le premier enfant de chaque famille était *Kelen* (qui deviendra un dans le dénombrement), tous les 2e enfants étaient *Fila* (deux), *Saba* (trois) et ainsi de suite : *Naani* (quatre), *Duuru* (cinq), *Wɔɔrɔ ou wôôrô* (six), Wolonfila (sept).

‘La manière dont les noms des enfants se suivaient, c’est ce qui a été appliqué aux doigts des mains pour exprimer les nombres jusqu’à sept, *seegin* (retour), ou recommencement de la maternité, devient huit ; pour la suite, ils ont deviné que celui qui doit suivre est dans le ventre (« *kɔnɔntɔn*» ou kônôntôn , d’où neuf). Pour nommer le dernier des doigts on a brandi les deux mains pour dire « a tan (comme ça) » : nous avons le dix ! C’est comme ça que notre connaissance a procédé’.

Cela n’ayant pas suffi à compter ils ont pensé aux orteils en disant *tan ni kelen* (10 et 1), … puisqu’à 20, on a dit « *mogo* (l’individu) », *mogo* ni *kelen*, *mogo ni fila*…, *mogo ni tan* (30), *mogo ni tan ni kelen* (31)…*mogo-mogo (personne-personne)* ou *mogo fila* (deux individus) (40). *Mogo* (l’individu) est finalement devenu *mugan (vingt)*. Puisque la natte était faite pour l’homme et la femme, le nom de la natte a été attribué à quarante (40) « *dèbè* (natte) ». *Dèbè ni tan (quarante et dix)* désignait 50, les comptes s’arrêtent à soixante qu’ils ont appelé *« manin* kɛmɛ (cent des malinké) ». Puis ils ont évolué à 80 nommé « *bamananan* kɛmɛ (cent des bambara) ». Ils sont arrivés à cent avec l’introduction des arabes au marché par dire « *silaméya* kɛmɛ (cent de l’islam) »’ (Cf. annexe 2, Tableau A, pour les correspondances entre les mots-nombres et leurs valeurs numériques.

(D’après des extraits d’un entretien (non publié), en 2021, à KEITA Kamory, chercheur et professeur de N’ko résident à Sikasso, Mali, dans le cadre d’une thèse).

2.3 Compter en grec : mots arithmétiques, utilisation pratique et interprétation traditionnelle des nombres

2.3.1 *La culture de la vie quotidienne, comprenant de la mesure du temps (contribution du calendrier, des chronomètres, etc.) et des échanges économiques pendant tous les siècles.* Il y avait beaucoup d’activités commerciales entre les grecs et les peuples du Moyen-Orient et autour de la Méditerranée, en utilisant des systèmes symboliques particuliers (voir par exemple V. Katz, 1998, pp.12-14). Les systèmes de numération (à base 10, à base 60, etc.) étaient utilisés en général, avec des différences importantes au niveau de représentation. La structuration de “mots” arithmétiques était surtout additive, mais elle était multiplicative pour les multiples de 1000, 10000, etc. Par exemple ιε΄ («πεντεκαίδεκα», <pentekédeka>, quinze), mais ͵δ («τετράκις χίλιοι», <tetrakis hilii>, quatre mille), ͵ι («μύριοι», <mirii>, dix mille), ͵ρ («δεκάκις μύριοι», <dekakis mirii>, cent mille) et aussi ͵διε΄ («πεντεκαίδεκα και τετράκις χίλιοι», <pentekédeka ke tetrakis hilii>, quatre mille quinze).

2.3.2 *L’interprétation de nombres dans la tradition mathématique de l’Antiquité Grecque.* Suivant D. Moukanos (1979), Ioannis Philoponos, dans un texte important, commentaire sur Aristote, *De l’Âme*, interprète en détail les quatre premiers nombres cardinaux (1, 2, 3 et 4) comme correspondants aux dimensions 0, 1, 2, 3 de figures géométriques :

- *L’unité* (<I monàs>, «Η μονάς») correspond à l’entité géométrique d’un *point,* qui n’a pas de parties (<amerès>, «αμερές»», selon Euclide), n’a pas de dimension, ou bien (en terminologie topologique moderne) il est “de dimension 0”.
- *Le couple* (<I diàs>, «Η δυάς») correspond à l’entité géométrique d’une *droite* (évidemment définie par 2 points) qui est «une longueur sans largeur» («μήκος απλατές», selon Euclide) et donc il est “de dimension 1”.
- *La trinité* (<I triàs>, «Η τριάδα») correspond à l’entité géométrique d’une *surface plane*, donc elle est “de dimension 2”.
- *Le quadruple* (<I tetràs>, «Η τετράς») correspond à l’entité géométrique d’une *figure solide*, (p.ex. le tetraèdre) donc il est “de dimension 3”.

Ainsi, l'interprétation traditionnelle de nombres dans l'Antiquité Grecque est surtout géométrique. Cette interprétation de nombres s'oppose à leur interprétation moderne ensembliste, comme cardinaux des ensembles finis qui est totalement indépendante de la forme géométrique.

2.4 N'we/un, bidri/deux, rharhu/trois… Comment compte-t-on en ronga?

Le ronga est une langue bantoue parlée au sud de Mozambique, dans les provinces de Maputo, Gaza et Ville de Maputo. Le ronga est parlé par environ 200 mille personnes, selon le recensement général de la population de 1997 ; il a quatre variantes parlées à savoir: xikalanga, xinondrwana, xihlanganu et xizingili. Cette étude suit la variante xinondrwana, parlée dans les villes de Maputo, Matola et Marracuene.

Tout d'abord, il est important de souligner qu'en ronga, les noms de nombres cardinaux sont simples et composés et on utilise particulièrement les chiffres arabes. En ronga, le système de comptage est basé sur des groupements de 5 et de 10 - que nous pourrions appeler **bases rudimentaires**. Les nombres cardinaux simples sont 1, 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1000, auxquels correspondent les mots-nombres, respectivement, n'we "un", bidri "deux", rharhu "trois", mune "quatre", ntlhanu "cinq", khume "dix", drana "cem", gidi "mil". Les nombres restants sont composés à partir de ceux-ci. À noter qu'en ronga, la numération a un caractère additif en ce qui concerne les nombres inférieurs à vingt (par exemple, 6 = 5 + 1 ; 7 = 5 + 2 ; 15 = 10 + 5 ; 17 = 10 + 5 + 2), et multiplicatif et additif (mixte), à partir de dix (par exemple, 21 = 2 x 10 + 1 ; 27 = 2 x 10 + 5 + 2). Autrement dit, pour dire **7**, il n'y a pas de mot-nombre simple, mais une composition entre le **5** et au **2** ; l'addition entre eux reste implicite, et est traduite par **na** (qui signifie **et**, en français).

Voyons, dans le tableau qui suit, comment compte-t-on dans cette langue.

N	Numération verbale	Lecture	N	Numération verbale	Lecture
1	…n'we	un	11	Khume wa …na –n'we	Dix [nom] et un
2	…bidri	deux	12	Khume wa …na –bidri	Dix [nom] et deux
3	…rharhu	trois	13	Khume wa …na –rharhu	Dix [nom] et trois
4	Mune…	quatre	14	Khume na mune wa…	Dix et quatre à…
5	Ntlhanu…	cinq	15	Khume na ntlhanu wa…	Dix et cinq [nom]
6	Ntlhanu wa…na –n'we	Cinq [nom] et un	16	Khume na ntlhanu wa…na –n'we	Dix et cinq [nom] et un
7	Ntlhanu wa…na –bidri	Cinq [nom] et deux	17	Khume na ntlhanu wa…na –bidri	Dix et cinq [nom] et deux
8	Ntlhanu wa…na –rharhu	Cinq [nom] et trois	18	Khume na ntlhanu wa…na -rharhu	Dix et cinq [nom] et trois
9	Ntlhanu wa…na mune	Cinq [nom] et quatre	19	Khume na ntlhanu na mune wa…	Dix et cinq [nom] et quatre
10	Khume	Dix	20	**Ma**kume mabidri…	Dizaines deux

Tableau 4. *Un exemple de comptage en ronga*

En ronga, comme dans de nombreuses langues bantoues, les trois premiers chiffres sont des **adjectifs**, qui s'accordent avec les noms selon la classe nominale correspondante, tandis que les chiffres suivants sont des **noms**. Voyons les exemples suivants :

Cat.	Nombres	Ronga	*Français*	Ronga	*Français*
Adjectifs	-n'we	**Xi**pixi **xi**n'we	*Chat un*	Mhunu **mu**n'we	*Personne une*
	-bidri	**Svi**pixi **svi**bidri	*Chats deux*	Vhanu **va**bidri	*Personnes deux*
	-rharhu	**Svi**pixi **svi**rharhu	*Chats trois*	Vhanu **va**rharhu	*Personnes trois*
Noms	Mune	Mune wa **svi**pixi	*Quatre chats*	Mune wa **vha**nu	*Quatre personnes*
	Ntlhanu	Ntlhanu wa **svi**pixi	*Cinq chats*	Ntlhanu wa **vha**nu	*Cinq personnes*

Tableau 5*. Les nombres comme adjectifs et comme noms en ronga*

En résumé, nous pouvons dire que le rôle spécifique du 5 et du 10 est une particularité du ronga. L'utilisation des caractères additifs et multiplicatifs est manifeste - et en général non explicitée directement - dans le comptage dans les différentes langues, mais dans le cas du ronga, cette utilisation est beaucoup plus fréquente, puisqu'il y a moins de mots-nombres simples. Un facteur qui peut avoir des implications sur les premiers apprentissages …

2.5 Comparaison sommaire du comptage entre deux langues romanes, le français et le portugais

Ces deux langues, issues du latin, ont perdu presque complètement les déclinaisons, c'est-à-dire, les différentes formes qui peuvent prendre les mots, en fonction du rôle grammatical dans la phrase; elles sont parlées en plusieurs continents, et chacune par entre 250 et 300 millions de locuteurs. Les deux langues utilisent des chiffres arabes, et utilisent un système décimal, de base dix - le français garde quant à lui des traces d'un système vigésimal. Dans les deux langues, la numération a un caractère additif en ce qui concerne les nombres inférieurs à soixante-dix-neuf (en français) ou à cent (en portugais) ; par exemple, 24 = 20 + 4, 69 = 60 + 9. Un caractère mixte (multiplicatif et additif) est observé à partir des centaines dans les deux langues (par exemple, 329 = 3 x 100 + 29) et également entre quatre-vingts et quatre-vingt-dix-neuf en français (par exemple, 97 = 4 x 20 + 17). La régularité de la succession des nombres est celle transmise par le latin :

Français	un/une – deux – trois – quatre – cinq – six – sept – huit – neuf – dix
Portugais	um/uma – dois/duas – três – quatro – cinco – seis – sete – oito – nove – dez
Latin [5]	Unus – duo – tres – quattuor – quinque – sex – septem – octo – novem – decem

Tableau 6*. La succession des dix premiers nombres en français, en portugais et en latin*

À noter aussi les **modifications de genre**, par rapport au latin : un/une en français, *um* (M)/*uma* (F) en portugais, des modifications analogues. Mais en portugais, pour le 2, *dois* (M)/*duas* (F), il y a deux formes de pluriel, l'une pour le masculin, l'autre pour le féminin, contrairement à ce qui se passe en français. À noter aussi que le latin avait trois genres (féminin, masculin, neutre) lesquels ne se sont pas transmis aux langues romanes. Nous mentionnons ici seulement la forme la plus

[5] À noter que le latin avait trois genres (féminin, masculin, neutre) lesquels ne se sont pas transmis aux langues romanes. Nous mentionnons ici seulement la forme la plus courante, celle du masculin.

courante, celle du masculin. Pourrait-on y voir une association, même distante, au duel, en arabe ? A noter que le portugais a de très nombreux mots d'origine arabe (M.C.Conceição, 2022).

Par ailleurs, comme bien le note Dorier (2021, p.101), en français 'trois', vient du même mot 'tri' lequel donne également 'très' et 'trop'. Un-deux-beaucoup, nous pourrions presque observer que le 'pluriel' commence vraiment … à trois. Un autre vestige du duel de l'arabe ? - duel que le grec (ancien) avait aussi …

On peut aussi remarquer que le français parlé en France et au Québec garde des restes d'un **système vigésimal** (correspondant à un comptage au Moyen-Âge, par groupements de vingt). Le comptage de soixante à quatre-vingts révèle des traces de ce système. On peut observer aussi l'utilisation simultanée en France et au Québec, des vestiges de ce système vigésimal, associé à des groupements de vingt. Il aura été utilisé peut-être par les Gaulois, ou par les Celtes voire Normands … Les spécialistes ne seraient pas d'accord sur l'origine de ce comptage, mais les vestiges d'un système vigésimal sont bien attestés, dans le langage courant ; un exemple bien connu est celui de l'Hôpital des Quinze-Vingts, fondé par Louis IX, vers 1260, lequel avait 300 lits, probablement en 15 chambres de 20 lits chacune. Dans des textes anciens on peut trouver, par exemple, « trois vingts » pour 60, « trois vingt dix » pour 70, « sept vingt » pour 140.

Des disparités régionales peuvent exister, dans cette partie irrégulière de la comptine numérique, pour les noms des dizaines. Elles sont illustrées dans le tableau suivant :

FR/QUE/BE/CH	vingt – trente – quarante – cinquante – soixante – **soixante-dix / septante (BE/CH)** – **quatre-vingts / huitante** ou **octante (CH)–quatre-vingt-dix / nonante (BE/CH)**–cen
PT	vinte – trinta – quarenta – cinquenta – **sessenta** – **setenta** – oitenta – noventa – cem

***Tableau** 7. Les noms des dizaines utilisés en français **(France/Fr, Belgique/BE), Suisse/CH)** et en portugais (PT) – en gras, les différences régionales de ces désignations*

En résumé, nous pouvons noter que le comptage dans ces langues issues du latin se maintient en général assez proche de celui de la langue d'origine, malgré certaines différences importantes, déjà mentionnées, dans le cas du français. Ces irrégularités en français sont dues à la persistance du système vigésimal, entre 69 et 99, surtout dans le français (de France) phénomène qui n'est pas retrouvé dans le comptage en portugais. Mais ces irrégularités obligent, nous semble-t-il, les enseignants francophones à prendre en compte la délicate question de la numération, peut-être plus que dans d'autres latitudes où le comptage est plus régulier, où l'écriture numérique est congruente à son expression orale. Question qui reste ouverte, et que mériterait une étude didactique.

3. SYNTHÈSE

La démarche heuristique qui mène à compréhension du monde a besoin de structures linguistiques et de processus cognitifs qui sont inséparables et la construction des concepts se fait par référence à des situation de contexte, tel que nous l'avons vu ci-dessous pour les systèmes de comptage. Ceci montre aussi que les représentations sémiotiques qui découlent des réseaux sémantiques sont secondaires ou extrinsèques, tel que l'avait expliqué B. D'Amore en 2001.

Soulignant les points de départ qui affirment les mathématiques comme des faits de langues et que les langues façonnent la connaissance, les exemples présentes suggèrent que « les représentations de objets mathématiques sont partielles quant à ce qu'elles représentent » (F. Hitt, 2004, p.350). Par exemple, par rapport au type d'opérations et de groupements sur lesquels se base le comptage peut donner aux enseignants des indications sur des possibles difficultés d'élèves dans les premiers apprentissages de la numération. Que la numération utilise des groupements autour du 5 et du 10, d'une façon systématique (cas du ronga), ou autour du 10 et du 20 (cas résiduel et partiel, du français), ou des groupements systématiques de 10 (cas du portugais, et de beaucoup d'autres langues européennes).

Le changement de classe grammaticale entre nom et adjectif selon les quantités, les questions de genre des nombres, et la différence entre conception de nombres cardinaux, ensembles finis, et celles des nombres en tant que formes géométriques nous semble être aussi des facteurs à tenir en considération par les enseignants.

Notre analyse théorique nous amène à l'hypothèse suivante : certaines de ces caractéristiques peuvent avoir des effets importants sur l'apprentissage des élèves ; d'autre part, elles peuvent aider les enseignants à identifier des difficultés éventuelles des élèves, en ce qui concerne la compréhension du comptage, ainsi que sur l'apprentissage des opérations numériques. Ce n'est qu'une hypothèse, laquelle nous semble pouvoir amener à des études didactiques sur la numération, en tenant compte des caractéristiques linguistiques et mathématiques de ce domaine élémentaire et complexe, simultanément.

Ceci n'est que le début de notre réflexion sur aspects des désignations et des dénominations des concepts mathématiques ou de la recherche d'équivalents entre entités du langage mathématique et des formes linguistiques qui leur sont associées. Toutes construisent des visions du monde, voire des mondes.

BIBLIOGRAPHIE

CONCEIÇÃO, M. C. (2016). Terminologies et politiques linguistiques : Déclaration de Milan 2012. In M.T. Zanola, M.C. Conceição, & P. Guasco (Éds), *Terminologie e politiche linguistiche* (p.155). Milano : EDUCatt

CONCEIÇÃO, M. C. (2022). Terminologies en portugais : apports terminologiques arabes, In Farouq, W. (coord), *La lexicografia araba, intereccio di lingue, culture e civilità*, Milan, Edcuatt (sous presse)

D'AMORE, B. (2001). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique : interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. *XXXVIII*, 2, 143-168.

DORIER, J.-L. (2021). *S'il te plait, compte-moi les moutons !,* Carnets des sciences de l'éducation, Genève : Université de Genève.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

HITT, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage des mathématiques et leur rôle dans la démarche heuristique, *Revue de Sciences de l'Éducation*, vol 30-2, pp. 329-354.

KATZ, V. (1998). *A History of Mathematics. An Introduction*, Massachusetts: Addison-Wesley.

MOUKANOS, D. (1979). *La Manière d'Être des Objets Mathématiques selon Platon et Aristote*. (Thèse de Doctorat, en grec), Athènes : Université d'Athènes.

SNOW, C.P. (1959*). The two cultures*, Cambridge: Cambridge University Press.

Site consulté :
https://www.languagesandnumbers.com/comment-compter-en-bambara/fr/bam/

GUNTHER, J-F. et al. (2020). Langages, mathématiques. *Regards sur le processus d'enseignement-apprentissage*, in hal-03188648

ANNEXES

Annexe 1. Terminologies et politiques linguistiques : Déclaration de Milan 2012

Déclaration approuvée à l'unanimité par la XIVe Assemblée Générale de REALITER (Milan 2012), rédigée et proposée par MANUEL CÉLIO CONCEIÇÃO

La Déclaration de Milan 2012 souligne la nécessité du maintien de l'étude et de la création terminologique dans toutes les langues et encourage la promotion de la diversité linguistique dans tous les domaines.

1. Un des objectifs de REALITER est la promotion des terminologies dans les langues néolatines.
2. Pour des raisons de mondialisation et de validation internationale des produits de la recherche scientifique, la situation géolinguistique et sociolinguistique actuelle accentue le monolinguisme de la recherche scientifique, qui se veut exprimée en anglais *lingua franca*.
3. Les membres de Realiter, réunis le 17 novembre 2012 dans la XIVe Assemblée générale à Milan :
   - – conscients de la distinction dans le processus de recherche du produit de cette recherche ;
   - – sachant que la science se doit d'être socialement légitimée et utile et que cela ne peut se faire que par les langues ;
     1. Soulignent la nécessité de maintenir l'étude et la création de terminologies dans toutes les langues, seules garantes et seuls témoins des différentes conceptualisations et de la richesse des différentes approches des objets scientifiques et techniques ;
     2. Encouragent la promotion de la diversité linguistique dans tous les do- maines, c'est-à-dire l'enseignement, les rapports avec la société, la re- cherche et la publication de ces résultats dans les langues néolatines.

Annexe 2. Bamanankan : Liste de mots-nombres et leurs correspondances

N	*Mots-nombres*
1	kelen
2	fila
3	sàba
4	náani
5	dúuru
6	wɔɔrɔ
7	wólonwula
8	séegin
9	k̀ɔnɔntɔn
10	tán

N	*Mots-nombres*
11	tán ní kelen
12	tán ní fila
13	tán ní sàba
14	tán ní náani
15	tán ní dúuru
16	tán ní wɔɔrɔ
17	tán ní wólonwula
18	tán ní séegin
19	tán ní k̀ɔnɔntɔn
20	mùgan

N	*Mots-nombres*
30	bísàba
40	bínaani
50	bídúuru
60	bíwɔɔrɔ
70	bíwolonfila
80	biséegin
90	bík̀ɔnɔntɔn
100	k̀ɛmɛ
1 000	wa kelen
un million	mílyɔn kelen

Tableau A : Liste des correspondances entre l'écriture chiffrée du nombre N et mots-nombres en bamanankan

(Adapté de https://www.languagesandnumbers.com/comment-compter-en-bambara/fr/bam/)

Deux différentes approches algébriques pour résoudre les équations quadratiques : al-Karajī versus Ibn al-Bannā’

Foued Nafti
ECOTIDI, ISEFC, Université Virtuelle de Tunis.

RÉSUMÉ

Dans cet article nous comptons comparer deux approches algébriques de résolution des équations quadratiques telles quelles sont énoncées dans la tradition arabe, de dégager les différentes techniques utilisées par les deux mathématiciens al-Karajī (X^e siècle) et Ibn al-Bannā’ (XIII^e siècle), et de révéler le développement éventuel sur le plan méthodique ainsi que sur le plan lexical au sein de cette discipline à travers leurs textes successifs, *Causes de l’algèbre* et *Lever du voile sur le calcul*.

1. INTRODUCTION

Dans la phase embryonnaire de l’algèbre, les mathématiciens arabes prouvaient les algorithmes de résolution des équations quadratiques par le biais de la géométrie. En effet, al-Khwārizmī, le père fondateur de l’algèbre, en tant que discipline ayant son propre lexique, ses propres objets et ses propres techniques calculatoires, a commencé par présenter les six équations canoniques pour en chercher par la suite des algorithmes de résolution. Pour prouver sa démarche relative aux trois types d’équations composées, il fait recours à des figures[1]. Par contre, son successeur immédiat Abū Kāmil se réfère explicitement aux proposition II.5 et II. 6 des *Éléments* d’Euclide.[2]

C’est vers la fin du X^e siècle, avec al-Karajī, qu’on a commencé à chercher des moyens algébriques, pour aborder ce même chapitre. Cette tentative s’inscrit en fait dans une mouvance visant l’émancipation de cette discipline, l’algèbre, de l’assujettissement de la géométrie et de l’arithmétique. Et ce, suite à l’essor de cette discipline, attribué à l’école d’al-Karajī et dont les prémisses paraissent en fait bien avant dans le texte algébrique d’Abū Kāmil (Rashed, 2012).

Après presque un siècle et demi, Ibn al-Bannā’ reprend l’étude des équations canoniques avec une autre approche. Bien qu’elle propose aussi des preuves algébriques, l’approche de ce mathématicien maghrébin est, comme nous allons le prouver, différente de celle d’al-Karajī.

Nous entendons dans ce qui suit présenter les propos des deux mathématiciens susmentionnés, relatifs aux équations, et de comparer les preuves qui les constituent tant sur le côté procédural que sur le côté notionnel, lexical et technique qui caractérisent chacune d’entre elles.

2. LE PROCÉDÉ D’AL- KARAJĪ DANS L’OUVRAGE *CAUSES DE L’ALGÈBRE*

Rappelons d’abord la classification d’al-Khwārizmī des six équations canoniques, dont nous avons besoin le long de notre analyse. En fait, après avoir introduit les notions sur lesquelles il va bâtir ses propos, nous entendons la racine ou la *chose* x, le carré (*al-māl*) x^2 et le nombre, al-Khwārizmī présente les six équations (Voir tableau I) qu’il obtienne syntaxiquement en permutant ces trois

[1] Voir Musharrafa & Ahmad, 1937, pp. 21-27.

[2] Rashed, R. *Abū Kāmil, Algèbre et analyse diophantienne.* Édition, traduction et commentaire, Scienta Graeco-Arabica. Berlin ; Boston : De Gruyter, 2012, p. 43.

objets mathématiques, à savoir la racine *R*, le mal *M* et le nombre *N*, comme le montre le tableau suivant :

(E_1) :	$M = R$	$ax^2 = bx$
(E_2) :	$M = N$	$ax^2 = c$
(E_3) :	$R = N$	$bx = c$
(E_4) :	$M + N = R$	$ax^2 + c = bx$
(E_5) :	$M + R = N$	$ax^2 + bx = c$
(E_6) :	$R + N = M$	$bx + c = ax^2$

Tableau. *Les six équations canoniques d'al-Khwārizmī (Musharrafa et Ahmad, 1937, p. 17)*

En s'inspirant des travaux algébriques de ses prédécesseurs, Abū Kāmil et al-Khwārizmī, ainsi que de la traduction des *Éléments* d'Euclide et les arithmétiques de Diophante, al-Karajī a composé dans la dernière moitié du X^e siècle son ouvrage *al-Faḫrī* [3]dans lequel il a développé le calcul polynomial et repris le chapitre sur les équations. Plus tard, dans son ouvrage *al-Badī'*[4] il développe le calcul sur les radicaux en occultant le chapitre sur les équations. Par contre, dans son ouvrage *al-Kāfī*[5], il reprend hâtivement ce chapitre sans y présenter les démonstrations des algorithmes de résolution. Jusque-là, ce mathématicien prouve toujours ces algorithmes par le biais de la géométrie, mis à part une allusion, non profonde, à une autre méthode de résolution selon « la voie de Diophante » faite dans *al-Faḫrī*[6]. C'est en fait dans son traité *Causes de l'algèbre* qu'al-Karajī introduisit une *boite à outil* qui va lui permettre d'aborder les preuves des algorithmes de résolution par une approche purement algébrique (Nafti, 2017). Les détails de ses propos en ce qui concerne l'extension du calcul arithmétique aux objets algébriques dépassent l'objectif de cet article et pourraient être le sujet d'un travail ultérieur. Dans ce qui suit, nous présenterons ses propos dans son traité *Causes de l'algèbre*.

2.1 La quatrième catégorie : $(E.IV)$: $x^2 + bx = c$

> Tu prends la moitié du nombre de racines, tu la multiplies par elle-même et tu ajoutes au résultat le nombre qui est égal au *māl* plus les racines, et puis, tu prends la racine carrée de tout ce que tu as, de laquelle tu retranches la moitié du nombre de racines. Ce qui en reste est la racine du *māl*. (Nafti. 2017, p. 266).

En notations modernes, nous écrivons ceci ainsi :
La solution de l'équation $x^2 + bx = c$ est $x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$.

<u>Preuve</u> :

Pour résoudre cette équation, dit al-Karajī, on développe $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$, qui donne la somme $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$. Or, on a comme donnée : $x^2 + bx = c$.
Donc, $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$. Par la suite, $x + \frac{b}{2}$ est égale à la racine du nombre $c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

3 A.S. Saïdan, *Tārīḫ 'ilm al-ğabr fī l-'ālam al-'arabī*, Kuwait, 1986.
4 A. Anbouba, *L'algèbre al-Badī'd'al-Karagī.* Université Libanaise, Beyrouth, 1964
5 S. Chalhoub, *Al-Kāfī fī l-ḥisāb li Abī Bakr Muhammad ibn al-Hasan al-Karajī*, Univ d'Alep, 1986.
6 *Al-Faḫrī*, Saïdan, 1986, p. 154, ligne. 13 et p.159, ligne. 16.

D'où, on en déduit que $x = \sqrt{c + (\frac{b}{2})^2} - \frac{b}{2}$.

Notons que les nombres négatifs ne sont pas considérés dans la résolution. [7] Autrement dit, pour al-Karajī : $y^2 = z^2$ donne automatiquement $y = z$ (y et z positifs).

2.2 La cinquième catégorie $(E.V)$: $x^2 + c = bx$

L'auteur nous décrit le procédé de résolution de cette catégorie ainsi :

> Tu prends la moitié du nombre de racines, tu la multiplies par elle-même et tu lui retranches le nombre ajouté au *māl*, puis tu prends la racine carrée du reste de la différence et tu le retranches, ou tu l'ajoutes, à la moitié du nombre de racines. Ce qu'on obtient après addition ou après soustraction n'est autre que la racine du *māl*. (Nafti. 2017, p. 267).

En notations modernes, nous écrivons ceci ainsi :
La solution de l'équation $x^2 + c = bx$ est : $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c}$.

<u>Preuve :</u>
Pour résoudre cette équation, on développe $(x - \frac{b}{2})^2$ ou bien $(\frac{b}{2} - x)^2$, nous dit l'auteur.

1er cas : on a $(x - \frac{b}{2})^2 = x^2 + (\frac{b}{2})^2 - bx$.
Donc $(x - \frac{b}{2})^2 = x^2 + (\frac{b}{2})^2 - (x^2 + c) = (\frac{b}{2})^2 - c$. Et par la suite[8] $x = \frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c}$.
2er cas : on a $(\frac{b}{2} - x)^2 = x^2 + (\frac{b}{2})^2 - bx = (\frac{b}{2})^2 - c$ et donc $\frac{b}{2} - x = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c}$.
D'où : $x = \frac{b}{2} - \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c}$ Ceci lorsque $((\frac{b}{2})^2 > c)$.

Autrement dit, l'équation admet deux solutions. C'est le cas que nous rencontrons de nos jours lorsque le discriminant de l'équation est strictement positif.

Remarquons que la discussion qu'a faite al-Karajī dans son texte concernant la différence entre les deux carrés $(x - b)^2$ *et* $(b - x)^2$, au début du chapitre sur le partage en deux du nombre de racines, n'était en fait qu'une anticipation quant au traitement du cas où l'équation possède deux solutions différentes. Il étaye cette généralisation par l'exemple suivant :

Le cas d'une équation du type[9] $x^2 + c = bx$, avec $c = (\frac{b}{2})^2$. Dans ce cas on a
$(\frac{b}{2} - x)^2 = (x - \frac{b}{2})^2 = x^2 + (\frac{b}{2})^2 - bx = x^2 + (\frac{b}{2})^2 - (x^2 + c) = (\frac{b}{2})^2 - c = 0$

[7] Saïdan, *op. cit*., p. 130, texte arabe : Notons que dans *al-Faḫrī*, et en multipliant deux quantités ayant chacune un terme soustrait, al-Karajī attribua le signe moins résultant de la multiplication, au produit obtenu : « […] et neuf multiplié par moins deux donne moins dix-huit ». (*Ibid*., p. 130)
[8] Remarquons que, similairement à l'équation quadratique composée de la quatrième catégorie, al-Karajī ramène l'équation de la cinquième catégorie à une équation de la première catégorie, c'est-à-dire à une équation de la forme $x^2 = c$.
[9] *Ibid*., fol. 70v.

donc[10] $\left(\frac{b}{2}-x\right)^2=\left(x-\frac{b}{2}\right)^2=0$ Et par la suite, la racine cherchée est $x=\frac{b}{2}$.

2.3 La sixième catégorie $(E.VI)$: $x^2 = bx + c$

> Partage en deux le nombre de racines, multiplie-le par lui-même et ajoute-le au nombre qui est avec les racines, puis prends la racine du résultat. Tu lui ajoutes la moitié du nombre de racines, tu auras la racine du *māl*. (Nafti. 2017, p. 275).

En notations modernes nous écrivons ceci ainsi : la solution de l'équation $bx+c=x^2$ *est :*

$$x=\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}.$$

<u>Preuve</u> :

Al-Karajī se contente ici de donner des exemples. Toutefois, nous pouvons généraliser sa démarche ainsi : $\left(x-\frac{b}{2}\right)^2=x^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-bx=(c+bx)+\left(\frac{b}{2}\right)^2-bx=c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$

donc, $x-\frac{b}{2}=\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$ et par la suite[11] : $x=\frac{b}{2}+\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$.

Notons qu'al-Karajī précise qu'il est nécessaire dans la résolution de cette catégorie de développer seulement le produit $\left(x-\frac{b}{2}\right)^2$, car dans ce cas de figure, c'est-à-dire le cas de l'équation (E): $bx+a=x^2$, il est visible que le *māl* est plus grand que les racines.

Nous nous posons toutefois la question suivante : pourquoi ce problème d'existence ne s'est pas imposé à l'auteur lors de la résolution de l'équation de la V^e catégorie, c'est-à-dire celle de la forme $x^2+c=bx$?. En fait, même s'il ne nous le mentionne pas, nous pensons qu'il fut tout à fait conscient du fait que $x^2>bx$ entraine $x>b$. Et comme $b>\frac{b}{2}$, alors, $x>b>\frac{b}{2}$. Et par conséquent, la différence $\frac{b}{2}-x$ est automatiquement exclue. Par contre, si l'on est dans le cas de la catégorie $x^2+a=bx$, dont la forme même exige que $bx>x^2$ ce qui donne $b>x$, on n'a pas automatiquement $\frac{b}{2}>x$.

Il est à remarquer aussi qu'à la fin de chaque catégorie, et après avoir cité des exemples, al-Karajī signale qu'on procède de la même façon pour les racines sourdes. Néanmoins, il ne donne pas plus d'explications ni d'exemples, mais il nous dit : « On suit la même voie quant aux racines sourdes, comme on vient de le dire dans la première catégorie de ces équations. » (Al-Karajī*, op. cit.*, fol. 71^v).

Enfin, notons que la technique algébrique au moyen de laquelle al-Karajī résout les trois équations canoniques composées, à savoir $x^2+bx=c$; $x^2+c=bx$; $bx+c=x^2$ se résume dans le fait de les rendre, toutes, à la forme :

$$y^2=C \qquad (*)$$

En effet, dans le cas de l'équation $x^2+bx=c$, al-Karajī développe le carré :

[10] *« Dans ce cas, c'est comme si on a dit : il ne reste rien d'une racine moins cinq, ou bien, il ne reste rien de cinq moins une racine. La chose entière est donc équivalente à cinq et inversement. C'est ainsi qu'on procède, dans la pratique et dans l'explication de la cause de ceci* » (*Ibid*., fol. 70^v).

[11] Comme nous l'avons vu pour les catégories IV et V, al-Karajī ramène aussi la catégorie VI à une équation de la première catégorie, à savoir des *māls* sont égaux à un nombre ou, tout court, un *māl* est égal à un nombre.

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = c + \frac{b^2}{4}$$

Ainsi, en posant $y = x + \frac{b}{2}$ et $C = c + \frac{b^2}{4}$ on aboutit à la relation (*).

Dans le cas de l'équation $x^2 + c = bx$, il développe le carré $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2$:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 - bx + \frac{b^2}{4} = x^2 - (x^2 + c)^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - c$$

Ainsi, en posant $y = x - \frac{b}{2}$ et $C = \frac{b^2}{4} - c$, on retrouve aussi la relation (*). Dans le cas de l'équation $x + c = x^2$, al-Karajī développe le carré :

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 - bx + \frac{b^2}{4} = (bx + c) - bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} + c$$

Ainsi, en posant $y = x - \frac{b}{2}$ et $C = \frac{b^2}{4} \pm c$, on retrouve encore une fois la relation (*).

3. Le procédé d'Ibn al-Bannā' (1256/ 1321)

Dans la rubrique de son ouvrage *Lever du voile sur les faces du calcul* (*Kitāb Raf' al-ḥiğāb 'an wuğūh a'māl al-ḥisāb*) consacrée à l'algèbre, Ibn al-Bannā' présente des preuves[12] relatives aux algorithmes de résolution des équations canoniques. La première catégorie : « des *māls* sont égaux à des racines », est résolue exactement comme chez al-Khwārizmī, c'est-à-dire en identifiant les facteurs des deux membres de l'égalité. Aucune allusion à la division par l'inconnue algébrique n'est faite. En effet, il dit :

> La cause relative à la première catégorie, c'est que le résultat est égal à ce qui compte un seul *māl* des racines, car une seule chose multipliée par ce nombre lui est égale multipliée par elle-même, donc ce nombre est égal à la racine. (Aballagh, 1994, p. 309).

Cela pourrait être traduit en notations modernes ainsi : L'équation (E.I) : $x^2 = bx$ signifie $x.x = bx$. Et par conséquent, $x = b$.

3.1 La quatrième catégorie : $(\boldsymbol{E.IV})$: $\boldsymbol{x^2 + bx = c}$[13]

Ibn al-Bannā' nous propose par la suite la preuve de l'algorithme de résolution de l'équation de la quatrième catégorie, à savoir l'équation **:** (E.IV) : $x^2 + bx = c$. La formule de départ utilisée dans cette démonstration est nommée par Ibn al-Bannā' *«* multiplication par quadrature » *(Aḍ-ḍarb bi-l-tarbī')* [14]. En notations modernes, cela revient à considérer l'identité suivante :

$$\alpha.\beta = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 \qquad (B_1)$$

Manifestement, l'approche d'Ibn al-Bannā' se base sur la proposition 5. II des *Éléments* d'Euclide, bien que l'auteur ne le mentionne pas dans son texte. Cette proposition énonce que si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, le rectangle sous les segments inégaux de la droite entière avec le carré de la droite placée entre les sections, est égal au carré de la moitié de

[12] L'auteur utilise le mot *ta'līl* qui vient du mot *'illa* : cause.
[13] Aballagh, *op. cit.,* p. 185.
[14] Ceci nous rappelle l'identité qu'al-Karajī appelle *l'égalité duelle* (*al-musāwāt al-muthannāt)* et qui lui sert dans la détermination d'un nombre *a* et d'un nombre *b* en les égalant à une expression contenant leur produit, la somme de leurs carrés, leurs quotients, etc.

la droite entière. Ce qui s'interprète, algébriquement et en notations modernes, par la relation suivante :

$$a.b + \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Ensuite[15], Ibn al-Bannā' identifie ce que nous avons nommé α à la constante de l'équation, soit *c,* et β au carré x^2, pour avoir : $\alpha - \beta = c - x^2 = bx$ *et* $\alpha.\beta = cx^2$*,* et par conséquent à la démarche suivante :

$$c.x^2 = \left(\frac{x^2+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c-x^2}{2}\right)^2$$

$$c.x^2 + \left(\frac{c-x^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x^2+c}{2}\right)^2$$

Et après toute factorisation faite on aura[16] : $\left(\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}\right) x = x^2$. Ainsi, on retrouve la forme de l'équation du type (E. I) : $bx = x^2$, à savoir : *des racines sont égales à un māl.* Par conséquent, la racine est égale au nombre de racines. Autrement dit : $x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$.

3.2 La cinquième catégorie : (E.V) : $x^2 + c = bx$ [17]

Dans ce cas, il énonce que : $\left(\frac{x^2+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{bx}{2}\right)^2$. Ainsi,

$$\left(\frac{x^2+c}{2}\right)^2 - cx^2 = \left(\frac{x^2+c}{2} - c\right)^2 \qquad (B_2)$$

Ou bien,

$$\left(\frac{x^2+c}{2}\right)^2 - cx^2 = \left(\frac{x^2+c}{2} - x^2\right)^2 \qquad (B_3)$$

Et ce grâce à la symétrie de la relation (B_1) en α *et* β et que :

$$\alpha.\beta + \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha\right)^2 = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$$

Donc, en posant $\alpha = c$ et $\beta = x^2$, on aura : $cx^2 + \left(\frac{x^2+c}{2} - c\right)^2 = \left(\frac{x^2+c}{2}\right)^2$, soit aussi :

$$\left(\frac{x^2+c}{2} - c\right)^2 = \left(\frac{x^2+c}{2}\right)^2 - cx^2$$

Par passage à la racine carrée, on aura : $\frac{x^2+c}{2} - c = \sqrt{\left(\frac{x^2+c}{2}\right)^2 - cx^2}$ et donc

$$\sqrt{\left(\frac{x^2+c}{2}\right)^2 - cx^2} + \frac{x^2+c}{2} = \frac{x^2+c}{2} - c + \frac{x^2+c}{2} = x^2 + c - c = x^2$$

Ce qui entraine, puisque $x^2 + c = bx$, $\sqrt{\left(\frac{bx}{2}\right)^2 - cx^2} + \frac{bx}{2} = x^2$. D'où : $\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} + \frac{b}{2}\right) x = x^2$.

Remarquons que cette dernière équation est de la forme $bx = x^2$. Ainsi, modulo la transformation précédente, l'équation E.V : $x^2 + c = bx$ est transformée en une équation de la catégorie I : [(E.I) : $x^2 = bx$].

---

[15] M, Aballagh, Ibid, texte arabe, p. 54.
[16] Voir la démonstration complète en annexe.
[17] Aballagh, *op. cit.,* p. 186.

Deuxième méthode :

En passant à la racine carrée dans la relation (B_3), Ibn al-Bannā' énonce la relation :

$$\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\right) x = \left(\frac{x^2 + c}{2} - x^2\right)$$

En ajoutant $\frac{x^2+c}{2}$, de part et d'autre, il obtient : $\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\right) x + \frac{x^2+c}{2} = \frac{x^2+c}{2} + \left(\frac{x^2+c}{2} - x^2\right)$.

Ce qui donne : $\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\right) x + \frac{bx}{2} = \frac{2x^2+2c-2x^2}{2} = c.$

Ou encore : $\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} + \frac{b}{2}\right) x = c$, qui est une équation de la forme: $bx = c$.

Troisième méthode :

$\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\right) x = \left(\frac{x^2+c}{2} - x^2\right)$ soit $\frac{bx}{2} - \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\right) x = \frac{bx}{2} - \left(\frac{bx}{2} - x^2\right) = x^2$

et donc : $\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\right) x = x^2$.

Ainsi, on aboutit à une équation du type [(E.I) :$x^2 = bx$].

Quatrième méthode : (grâce à la symétrie de l'expression en x^2 et b) :

$$\frac{bx}{2} - \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\right) x = \frac{bx}{2} - \left(\frac{x^2+b}{2} - b\right) = b \text{ soit } \left(\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\right) x = b$$

Ainsi, on aboutit encore une fois à une équation du type (E.III).

3.3 La sixième catégorie : (E.VI) : $x^2 + bx = c$[18]

Il part dans ce cas de la relation : $(\alpha + \beta)\beta + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)^2$ $\quad (B_4)$

En posant $\alpha = bx$ *et* $\beta = x^2$, dans la relation (B_4), on aura : $cx^2 + \left(\frac{bx}{2}\right)^2 = \left(\frac{bx}{2} + x^2\right)^2$

On passe à la racine carrée des deux membres pour avoir : $\frac{bx}{2} + x^2 = \left(\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}\right) x$

En retranchant $\frac{bx}{2}$, on aura : $x^2 = \left(\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}\right) x$, qui est une équation du type (E.I) :$x^2 = bx$

mais, si nous ajoutons $\frac{bx}{2}$, on aura : $bx + x^2 = \frac{bx}{2} + \left(\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}\right) x$.

Et, Sachant que $bx + x^2 = c$, on aura : $c = \left(\frac{b}{2} + \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}\right) x$, qui est une équation du type E.III.

4. Retombées didactiques

Les deux approches relatives à la résolution des équations quadratiques que nous venons d'étudier, nous incitent à repenser l'introduction de ce thème algébrique aux élèves du secondaire. En effet,

[18] *Ibid.*, p. 186.

nous pensons que loin des complications que cause la notion de discriminent; notion qui nécessite à priori l'apprentissage d'une nouvelle formule ainsi que les conditions de son emploie dans la résolution comme, par exemple, le signe du discriminent, l'existence des solutions, les formules des deux racines dans le cas d'un discriminent positifs, etc., ces deux approches, surtout celle d'al-Karajī, sont susceptibles d'aborder ce volet algébrique avec moins de prérequis. Il serait donc utile de penser à élaborer un scenario didactique adéquat, comportant la dimension historique qui traite des trois types « d'équations composées » et de confronter les résultats empiriques avec la méthode classique enseignée dans nos écoles. Nous sommes en fait en train de travailler sur ce sujet et nous espérons que le contenu de cet article éclaire d'autres chercheurs en didactique des mathématiques à propos des enjeux de la dimension historique dans l'apprentissage de la notion d'équation.

5. CONCLUSION

La comparaison des travaux des deux mathématiciens, sujet de notre étude, relativement au chapitre sur les équations, révèle deux faits. Le premier est d'ordre lexical et l'autre d'ordre procédural.

En effet, pour résoudre les équations de type $(E.\ IV)$: $x^2 + bx = c$ et $(E.\ V)$: $x^2 + c = bx$, Ibn al-Bannā' utilise la règle arithmétique suivante appliquée aux quantités algébriques :

$$\alpha\beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$$

Il l'appelle *multiplication par quadrature*. Pour prouver l'algorithme de résolution d'une équation de la sixième catégorie : (E.VI) : $x^2 + bx = c$, il utilise par contre, l'identité suivante :

$$(\alpha+\beta)\beta + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)^2$$

De l'autre côté, signalons qu'al-Karajī énonce dans *al-Faḫrī*, ainsi que dans *al-Badī',* plusieurs identités semblables qui lui servent dans son projet d'« arithmétisation de l'algèbre». Par exemple, dans la rubrique *d'al-Faḫrī* intitulé *chapitre sur les propriétés des nombres*[19] , il énonce la règle suivante, pour $a > b$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a-b} + a - b\right) = a$$

Il la dénomme *l'égalité duelle* (*al-musāwāt al-muthannāt*).

Notons que ces identités sont utiles pour résoudre certains problèmes, comme par exemple ceux cherchant la racine carrée d'une « apotome » ou d'une « binôme », comme nous le voyons dans l'exemple de la racine carrée de $3 + \sqrt{8}$ en utilisant la formule[20] :

$$a = \sqrt{ab + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 2ab)} + \sqrt{\frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 2ab)}$$

[19] *Al-Faḫrī*, p. 141.

[20] Voir chapitre. XVII d*'al-Badī',* sur l'extraction des racines carrées, (Anbouba, *op. cit*., pp. 40-2).

Ces identités relient deux nombres a et b à des expressions généralement connues, comme leur différence, leur somme, la différence ou la somme de leurs carrés, leur produit et leur quotient[21].

En ce qui concerne le côté procédural, notons que l'approche adoptée par Ibn al-Bannā' dans la résolution algébrique des équations canoniques, quoiqu'originale, diffère manifestement de celle employée par al-Karajī. En effet, si le premier ramène les équations composées à l'une des équations simples, $(E.\ I)$ ou $(E.\ II)$ ou $(E.\ III)$, al-Karajī les ramène toutes à la deuxième catégorie de la classification d'al-Khwārizmī, à savoir $(E.\ II)$: $x^2 = c$.

D'autre part, Ibn al-Bannā', sans le dire, fonda implicitement ses démonstrations sur des formules géométriques puisées du livre V d'Euclide et ce sans les démontrer algébriquement. Quoique, dans certains cas, sa méthode est une algébrisation de la méthode géométrique de complétion ou de réduction du carré et dans d'autres cela révèle des démonstrations nées des techniques de l'algèbre et suggérées par elles[22].

Par contre, al-Karajī commence son texte *Causes de l'algèbre* par une ébauche dans laquelle il étend le calcul arithmétique, par le moyen d'une analogie entre le nombre et l'inconnue algébrique, aux monômes et expressions algébriques. Cela lui a permis entre autres de prouver algébriquement les deux identités remarquables $(a \pm b)^2 = (a^2+b^2 \pm 2ab)$, où a et un monôme en x à coefficient rationnel positif et b un nombre rationnel positif. Ces identités font partie de ce que nous avons appelé *boite à outils algébrique* qui a servi de socle axiomatique pour al-Karajī dans son algébrisation du chapitre sur les équations. Reste à dire que, comparée à celle d'Ibn al-Bannā', l'approche d'al-Karajī, basée uniquement sur les deux identités remarquables susmentionnées, demeure plus simple et plus pratique.

Finalement, on peut se demander, au vu de cet essor relatif à la résolution des équations quadratiques, jusqu'à quelle limite les algébristes exerçant après l'époque d'Ibn al-Bannā' ont profité de son approche et de celle d'al-Karajī dans leurs travaux et si cette tradition conceptuelle, qui consiste à résoudre les équations par les moyens de l'algèbre, seule, a influencé les mathématiciens occidentaux, notamment ceux de l'école italienne?

BIBLIOGRAPHIE

ABALLAGH, M. (1994). *Kitāb Raf' al-ḥiğāb 'an wuğūh a'māl al-ḥisāb d'Ibn al-Bannā al-Marrākušī*. Fez: Faculté des Lettres et des Sciences Humaines.

ANBOUBA, A. (1964). *L'algèbre al-Badī'd'al-Karagī*. Beyrouth: Université Libanaise.

CHALHOUB, S. (1986). *Al-Kāfī fī l-ḥisāb li Abī Bakr Muhammad ibn al-Hasan al-Karajī*. Alep: Université d'Alep.

DJEBBAR, A. (1981). Enseignement et recherche mathématiques au Maghreb des XIIIe-XIVe siècles. Publications mathématiques d'Orsay, 81-2.

MUSHARRAFA, A. M. et AHMAD M. Mursi (1937). *Kitab al-jabr li l-Khwarizmi* [The algebra book of al-Khwarizmi]. Le Caire : Paul Barbier.

NAFTI, F. (2017). *Al-Karajī algébriste, avec l'édition critique de 'Ilal ḥisāb al-ğabr*. Thèse de doctorat : ENIT : Univ Tunis El-Manar.

[21] Une autre identité donnée par l'auteur qui relie la somme des carrés de deux nombres avec leur produit et le quotient de l'un par l'autre : $a^2 + b^2 = (\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) . ab$ (Saïdan, *op. cit.*, p. 134).

[22] Djebbar, 1981, p. 33.

RASHED, R. (2012). *Abū Kāmil, Algèbre et analyse diophantienne.* Édition, traduction et commentaire, Scienta Graeco-Arabica. Berlin, Boston : De Gruyter.

SAÏDAN, A. S. (1986). *Tārīḫ ʿilm al-ğabr fī l-ʿālam al-ʿarabī*, Vol. I, II. Kuwait.

Annexe

*Résolution de l'équation (*E.IV) : $x^2 + bx = c$, par Ibn al-Bannā', en utilisant l'identité (B_1).

$$c.\,x^2 = \left(\frac{x^2 + c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c - x^2}{2}\right)^2$$

$$c.\,x^2 + \left(\frac{c - x^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + c}{2}\right)^2$$

$$c.\,x^2 + \left(\frac{bx}{2}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + c}{2}\right)^2$$

$$\left[c + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] x^2 = \left(\frac{x^2 + c}{2}\right)$$

$$\sqrt{\left[c + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] x^2} = \frac{x^2 + c}{2}$$

$$\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}\,.\,x = \frac{x^2 + (bx + x^2)}{2}$$

$$\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}\,.\,x = x^2 + \frac{bx}{2}$$

$$\left(\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}\right) x = x^2$$

Ainsi, on cela aboutit à l'équation (E. I) : $bx = x^2$, à savoir : *des racines sont égales à un māl.* Par conséquent, la racine est égale au nombre de racines. Autrement dit : $x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$

L'approche interdisciplinaire dans l'enseignement Cas du système d'enseignement tunisien

Samia Oueslati
Université Virtuelle de Tunis
Ridha Najar
Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue

RÉSUMÉ

L'article présente une étude historique et épistémologique de l'interdisciplinarité scolaire. A travers une recension de travaux de recherchequi se sont intéressés à ce sujet, nous tentons de répondre aux questions suivantes : qu'est-ce que l'interdisciplinarité scolaire ? Quelles sont ses finalités ? Quels liens avec les disciplines ? Quelles sont les difficultés et les contraintes de sa mise en œuvre au niveau de l'enseignement et de l'apprentissage ?
Nous terminons par donner un aperçu sur l'interdisciplinarité dans le système éducatif tunisien.

Mots-Clés : Interdisciplinarité, discipline, courant praxéologique, approche instrumentale, contexte curriculaire, enseignement par projet.

1. INTRODUCTION

Les exigences sociales et la nécessité de mettre à contribution des savoirs de différents domaines pour résoudre les défis auxquels sont confrontés nos sociétés et le monde aujourd'huiont amené les scientifiques de disciplines différentes à s'engager dans un travail de collaboration pour relever ce défi. Cette situation a engendré de nouvelles orientations aux systèmes éducatifs à travers le monde, qui favorisent des pratiques intégratives et la connexion des différentes disciplines d'enseignement.
Dans son rapport de 2018 :« Le futur de l'éducation et des compétences. Projet Éducation 2030 », l'OCDE stipule que « Les apprenants devraient pouvoir établir des liens entre ce qu'ils apprennent et ce qu'ils vivent, donnant ainsi un sens à leurs acquis. Il faut pour cela conjuguer un apprentissage interdisciplinaire et collaboratif et une maîtrise des connaissances liées à chaque matière. » (Rapport de l'OCDE, 2018, p. 9).
L'importance de l'interdisciplinarité à l'école, dans la vie quotidienne et dans la formation citoyenne étant devenue une exigence scientifique, plusieurs chercheurs se sont intéressés à la mise en place de l'approche interdisciplinaire en éducation. Dans leur recension d'écrits portant sur le sujet, Samson, Hasni et Ducharme-Rivard (2012), relèvent un ensemble de rapports gouvernementaux qui « ont proposé l'organisation du programme [de formation de l'école québécoise] en domaines d'apprentissage scolaires intégrant chacun plusieurs disciplines afin de favoriser le décloisonnement de ces dernières.» (Samson et al, 2012, p. 195).
Klein (1990) déclare qu'aux Etats-Unis, « il est certain que l'interdisciplinarité est devenue une orientation majeure en éducation au cours des années soixante et au début des années soixante-dix, années marquées par de nombreuses tentatives expérimentales.» (Klein, 1990, p. 40).
Pour les chercheurs, il s'agit précisément de trouver des éléments de réponse aux questions suivantes :

- Qu'entend-t-on par interdisciplinarité scolaire ? Quelles sont ses finalités? quelles sont les modalités de sa mise en œuvre?

- Quels sont les objets et les enjeux de l'interdisciplinarité scolaire ? Quels liens avec les disciplines ?
- Quelles sont les types de difficultés et les contraintes que peuvent rencontrer la mise en œuvre de l'interdisciplinarité au niveau de l'enseignement et de l'apprentissage ?
- Ces contraintes sont-elles dues aux différentiations des disciplines, à la spécialisation des enseignants, à l'organisation du curriculum, à la disponibilité des ressources … ?

La problématique d'une approche interdisciplinaire dans l'enseignement des mathématiques s'inscrit également dans ce contexte. Si plusieurs chercheurs (Samson, 2007, Samson et al. 2008) constatent qu'à l'école, les mathématiques servent souvent d'outil ou de moteur aux sciences, Samson, Hasni et Ducharme-Rivard (2012) déplorent le fait que leur potentiel est « trop souvent limité à [une] utilisation […] accessoire (p. 195) ». Aussi sont-ils d'avis qu'il faudrait plutôt viser l'apprentissage de nouveaux concepts mathématiques dans le contexte des sciences et technologies. Pour Samson et al. (2008) : « le problème vient du fait que les programmes n'ont pas été pensés nécessairement en fonction de l'interdisciplinarité » (p. 168). Si les enseignants au secondaire qui ont participé à leur recherche étaient « conscients du fort potentiel quant aux liens entre les mathématiques et les sciences » (p. 159), ils ont également constaté que « les élèves [réutilisaient] peu de contenus mathématiques en sciences et qu'ils [avaient] une vision cloisonnée de l'enseignement et de l'apprentissage » (p. 159).

Cela soulève les questions suivantes :

- Dans quelle mesure les mathématiques peuvent-elles interagir avec les autres disciplines?
- Quelles structures curriculaires se prêtent le mieux à une approche interdisciplinaire dans l'enseignement des mathématiques ?
- Quelles formations,initiale et continue, des enseignants requiert une approche interdisciplinairedans l'enseignement ?

Nous nous proposons dans cet articled'interroger les travaux de recherche qui ont abordé ces questions. Nous terminons par donner un aperçu sur l'interdisciplinarité dans le système éducatif tunisien.

2. ORIGINE HISTORIQUE ET EPISTEMOLOGIQUE DE L'INTERDISCIPLINARITE DANS LES SCIENCES.

2.1 Genèse et finalités de l'interdisciplinarité

Les débats sur la question de la genèse de l'interdisciplinarité et ses finalités sont nombreux. À ce propos, les travaux de recherche mettent en évidence deux courants de pensée (Mathurin, 2002) : l'un praxéologique ou social, sous-tendu par une perspective instrumentale, et l'autre épistémologique.

2.1.1 Le courant praxéologique et l'approche instrumentale

Dans ce courant de pensée, les chercheurs estiment que l'avènement de la notion d'interdisciplinarité coïncide avec le mouvement de contestation sociale de la fin des années 60 du 20ème siècle. Selon ce courant, le recours à des pratiques interdisciplinaires vient en réponse à la poussée des exigences des sociétés qui demande des solutions opérationnelles et concrètes à des problèmes complexes ne pouvant être résolus par le recours à une seule discipline. Au cours de cette période, des critiques ont été dirigées à l'encontre des milieux universitaires que l'on tient pour responsables des dérives des technologies et des dangers qu'elles représentent pour l'environnement, la santé et plus généralement pour le droit des individus à vivre dans des conditions meilleures. Pour les adeptes du courant praxéologique (Sinaceur, 1983 ; Smirnov, 1983), il revient à l'université de se mettre en cause, d'évoluer et

de se mettre au service de la société. De même qu'il revient à la science de s'inscrire dans des processus d'appréhension du réel.
Ainsi, du point de vue du courant praxéologique, l'interdisciplinarité doit être entendue selon une perspective instrumentale, centrée sur la pratique et articulée sur le terrain (Klein, 1996). En d'autres termes, l'interdisciplinarité doit être orientée vers des interactions externes.

2.1.2 Le courant épistémologique

Alors que dans le courant praxéologique la réflexion sur l'interdisciplinarité est associée à une orientation des savoirs et de la science vers la vie réelle, le courant épistémologique associe ce concept à des soucis d'unité du savoir et à des exigences épistémologiques.
Certains penseurs de ce courant attribuent les préoccupations interdisciplinaires et pluridisciplinaires à l'antiquité, dans un souci d'universalité et d'une science unifiée et synthétique (Mathurin, 2002).Leurs arguments reposent sur le fait que, dès l'antiquité, la philosophie a favorisé le développement d'une science unifiée, synthétique intégrant les savoirs de l'époque.Cependant, plusieurs chercheurs trouvent que les démarches historiques précédentes relèvent plutôt de pratiques pluridisciplinaires dans une perspective d'érudition, et que le concept d'interdisciplinarité est apparu seulement au XX$^{\text{ème}}$ siècle en réponse à une hyperspécialisation des savoirs.
Pour Bertrand (1980) et Morin (1990), l'interdisciplinarité s'inscrit dans la quête de l'unité du savoir en vue d'éviter le danger d'hyperspécialisation et de réification de la structure disciplinaire. Dans la même logique, Gusdorf (1974) explique que « le projet de l'interdisciplinarité dessine d'âge en âge l'un des grands axes de l'histoire de la connaissance. A mesure que la progression du savoir se réalise par spécialisation, le souci de l'unité suscite le désir d'un regroupement. »
Par ailleurs, plusieurs chercheurs (Piaget, 1972 ; Pears, 1992 ; Vidal, 1992) estiment que l'interdisciplinarité est une réponse à l'évolution même des savoirs, ainsi qu'au cloisonnement des disciplines qui a pour conséquence d'occulter certains savoirs nécessaires au développement de la science. Selon Piaget (1972), « l'intérêt pour l'interdisciplinarité ne résulte ni d'un mode ou d'un hasard ni, non plus, de la demande sociale — eu égard entre autres aux problèmes complexes des sociétés —, mais strictement du besoin d'explication (causale) propre au développement même des sciences. » (Piaget, 1972, p.13)
Pour Lenoir et Sauvé (1998), la nécessité de l'ouverture du dialogue « *interdisciplinaire* », de l'adoption d'un regard extradisciplinaire devient une exigence scientifique.Plus précisément, lorsque les disciplines déjà existantes ne répondent pas aux questions posées à la recherche, on assiste à l'émergence de nouvelles disciplines via un processus d'emprunt aux disciplines existantes et de restructuration ce qui permet la constitution de nouveaux éléments ou de nouvelles disciplines permettant la réponse à des nouvelles questions. Morin (1994), donne un exemple de ce processus de transfert et d'enrichissement :

> La "révolution biologique" des années 50 est née d'empiétements, de contacts, de transferts entre disciplines aux marges de la physique, de la chimie, et de la biologie. Ce sont des physiciens comme Schrödinger qui ont projeté sur l'organisme biologique les problèmes de l'organisation physique. (Morin, 1994, p.1)

La littérature laisse ainsi apparaître deux orientations relatives à l'interdisciplinarité, à sa genèse et à ses objets.
Dans le pôle praxéologique, l'interdisciplinarité concerne des interrogations de portée encore plus générale relatives aux savoirs, et aux agents producteurs (individus et institutions), en rapport avec le monde (social, psychique et physique). Dans le pôle épistémologique, l'interrelation des disciplines entre elles décrit l'un des aspects du développement des sciences et répond à un souci d'unité du savoir.

Lenoir (2001, p.24) résume dans le tableau suivant les caractéristiques de chacune des orientations.

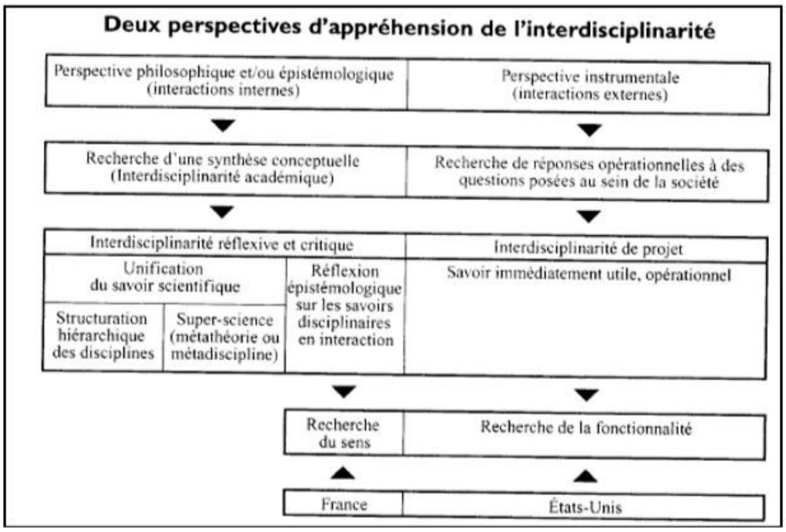


Figure 1. *Les deux perspectives d'appréhension de l'interdisciplinarité selon Lenoir (2001).*

Cela nous conduit à nous interroger quant à la dynamique qui régit la relation entre disciplines et interdisciplinarité.

3. DIALECTIQUE DISCIPLINARITE- INTERDISCIPLINARITE

Il n'existe pas dans la littérature de définition consensuelle de la notion de discipline. Mais la plupart des chercheurs s'accordent pour attribuer à ce terme deux caractéristiques. D'une part, une discipline est un système autonome régi par des règles, un langage, des techniques et des objets. « Une discipline est constituée d'un certain nombre de principes fondateurs, d'hypothèses générales, de concepts qui déterminent un champ d'étude et permettent en même temps de construire le phénomène en objet d'analyse. ». (Charaudeau, 2010, p.200) D'autre part, une discipline est un système soumis à des pressions sociales, politiques et institutionnelles qui influent sur son développement. Pour Maingueneau (2010)

> S'il est indéniable que la discipline comporte un versant épistémologique, "heuristique", et un versant sociologique, il n'en est pas moins vrai que les relations entre ces deux versants sont très variables, et que l'un influe sur l'autre dans une tension permanente entre les critères heuristiques et les critères institutionnels dans le découpage des disciplines. (Maingueneau, 2010, p.192)

Le philosophe Jean-Paul Resweber (2011) émet deux idées essentielles dans la dialectique discipline-interdisciplinarité : l'interdisciplinarité contribue à la genèse d'une discipline et est aussi une condition à son développement. De son côté, Charaudeau (2010) estime que la science est le résultat d'une maturation des idées, méthodes et théories, ce qui conduit à formuler l'hypothèse selon laquelle l'interdisciplinarité est au fondement même de la naissance des disciplines ; elle est aussi au cœur d'enjeux qui ne sont pas seulement scientifiques.
La question qui se pose alors est : comment se situe l'interdisciplinarité par rapport aux disciplines ?

> L'interdisciplinarité s'inscrit sur un parcours qui implique, en amont, le moment de la pluridisciplinarité et, en aval, celui de la transdisciplinarité. Pluri-, inter- et transdisciplinarité ne sont pas des procédures distinctes, mais des étapes d'un même processus dont l'interdisciplinarité constitue le "milieu", au triple sens de

> ce terme : l'écart ou la marge, l'espacement ou l'intervalle et le juste milieu visé par l'interprétation. (Resweber, 2011, p. 175)

Pluridisciplinarité, interdisciplinarité et transdisciplinarité sont des termes qui reviennent dans la littérature et impliquent différentes formes de collaboration entre les disciplines. Nous tentons dans ce qui suit de préciser le sens donnépar les auteurs à ces termes :
La *pluridisciplinarité*, ou la *multidisciplinarité*est la juxtaposition de plusieurs disciplines, plus ou moins voisines entre elles et la succession de leurs contributions, autour d'un thème commun (Lenoir et Hasni, 2006, p. 139).
L'*interdisciplinarité*, ou la *pratique interdisciplinaire* consiste à traiter une situation ou un problème en faisant interagir de manière féconde des objets de savoir de différentes disciplines autour d'un but commun (Lenoir et Sauvé, 1998b, p. 121). Il s'agit, selon Fourez, Maingain et Dufour (2002), d'une approche intégratrice impliquant une interaction entre deux ou plusieurs disciplines en vue de construire un modèle original en réponse à une problématique particulière.
La *transdisciplinarité*, contrairement à la multidisciplinarité et à l'interdisciplinarité, interroge les points de convergence des disciplines, regarde ce qui les unifie, ce qu'elles ont en commun au sein d'un projet et/ou d'un problème à résoudre (Charaudeau, 2010, p. 210-211). Dans la transdisciplinarité, la discipline se met au service des savoirs qui se situe à l'intersection des disciplines.
L'interdisciplinarité dans le monde des savoirs scientifiques nous amène à nous interroger quant à son importance et aux modalités de sa mise en œuvre dans l'enseignement.

4. L'INTERDISCIPLINARITE SCOLAIRE.

Les chercheurs distinguent entre savoirs scientifiques et savoirs scolaires, et ce, compte tenu des différences qui existent entre les objectifs, les objets, les systèmes de références et les procédés d'application de chacun des deux savoirs. Il en découle une distinction entre les disciplines scientifiques et les disciplines scolaires (Fourez et al*,* 2002 ; Lenoir et Hasni, 2006). Particulièrement, les disciplines scolaires sont influencées par les disciplines scientifiques de référence, les pratiques sociales de référence ainsi que par l'institution scolaire.Ces différences au niveau des savoirs impliquent nécessairement de faire la distinction entre les interdisciplinarités scientifique et scolaire.

Nous nous proposons dans ce qui suit d'interroger la littérature quant aux finalités de l'interdisciplinarité scolaire, les modalités de sa mise en œuvre et les défis et obstacles qui se posent à son implémentation.

4.1 Finalités de l'interdisciplinarité scolaire.

Tout comme pour l'interdisciplinarité scientifique, l'interdisciplinarité scolaire est appréhendée selon deux points de vue : l'un épistémologique qui pose la question des savoirs, du sens, de la compréhension et des processus cognitifs et l'autre social qui pose la question de la fonctionnalité et de la mise en place des conditions appropriées pour former des acteurs sociaux (Lenoir et Sauvé, 1998b, p. 138).D'autres auteurs (Legrand 1986, Mason 1996) ont justifié le recours à l'interdisciplinarité scolaire d'un point de vue pédagogique. Ils estiment que le fait de relier des disciplines scolaires à caractère abstrait, comme les mathématiques et les langues, à des disciplines à caractère plus concret, comme les sciences, facilite l'apprentissage pour les élèves quitrouvent des difficultés à appréhender des situations abstraites nécessitant le recours à la pensée formelle hypothético-déductive.
Ainsi, Fourez, Maingain et Dufour (2002) insistent sur le fait que l'interdisciplinarité permet de se donner une représentation plus adéquate des problèmes et des situations analysées que celle offerte par le simple regard disciplinaire. Lenoir et Sauvé (1998b) justifient, de leur côté,

l'interdisciplinarité comme essentiel pour l'intégration et le transfert des savoirs : « Il semble toutefois que la question de l'intégration des savoirs et leur transfert de la part des élèves soit devenue, aujourd'hui, l'argument majeur. » (Lenoir et Sauvé, 1998b, p. 125).
En guise de synthèse, Hasni et al. (2012) attribuent les finalités de l'interdisciplinarité scolaire à la jonction de trois pôles : Le pôle didactique et épistémologique (construction d'une représentation adéquate du monde et d'un rapport au savoir fondé sur la complexité), le pôle sociologique (égalité des chances face aux savoirs, appropriation d'un savoir utile pour tous, autant sur le plan individuel que sur le plan collectif. Un savoir permettant d'exercer une citoyenneté éclairée) et enfin le pôle pédagogique (motivation et augmentation de l'intérêt des élèves, prise en considération des processus psychopédagogiques, travail d'équipe, etc.).
Au vu de ces finalités, l'interdisciplinarité apparait comme un moyen mis en œuvre au service de l'enseignement-apprentissage, centré sur l'action du sujet apprenant en tant qu'acteur social. Cela nous amène à la question des modalités de sa mise en œuvre.

4.2 Des modèles didactiques de l'interdisciplinarité.

Lenoir (1994) a identifié différents modèles didactiques et pédagogiques proposés dans la littérature pour la mise en œuvre de l'interdisciplinarité scolaire. Il les a classés en fonction de leurs modes d'entrée, c'est-à-dire en fonction de l'aspect de l'enseignement autour duquel s'organise l'interdisciplinarité : L'*entrée par les objets d'apprentissage*. Un exemple consiste à partir d'un déclencheur commun, appelé aussi mise en situation ou amorce (qui peut être un thème, une idée, un événement, une situation de vie courante, un projet, etc.), pour servir de situation pédagogique de départ. L'*entrée par les habiletés*. Dans ce cas, l'apprentissage dans une discipline fait appel à des habiletés relevant d'une autre discipline. C'est le cas, par exemple, du recours à des habiletés en mathématiquesdans des activités d'apprentissage en sciences et technologies ou en univers social. L'*entrée par les démarches d'apprentissage*. Ici, l'interdisciplinarité implique l'utilisation d'une démarche commune par différentes matières scolaires, comme la démarche de résolution de problèmes.

5. L'INTERDISCIPLINARITE DANS UN CONTEXTE CURRICULAIRE.

La mise en place et l'implémentation de l'approche interdisciplinaire dans l'éducation a été une préoccupation majeure de plusieurs systèmes éducatifs. La problématique fondamentale étant : quelles sont les structures curriculaires les plus pertinentes ? Comment les aménager et les implémenter ?

Il importe de noter à ce propos, qu'il existe des options opposées quant à la conception des curricula dans une approche interdisciplinaire. La première option s'inscrit dans ce que Lenoir et Sauvé (1998a) appelle *approche radicale*. Cette approche opte pour un curriculum intégré, qui évacue les disciplines et s'appuie sur une approche thématique dans laquelle l'apprentissage se fait à partir de problèmes et/ou de situations de la vie réelle. La deuxième option s'inscrit dans ce que Lenoir et Sauvé (1998a) appelle *approche relationnelle*. Celle-ci opte pour une structuration curriculaire où les disciplines occupent une part conséquente. Les défenseurs de cette approche (Klein 1990, Lenoir et Sauvé 1998a) estiment que le maintien des disciplines est une garantie contre des tendances à verser dans l'utilitarisme et assure une responsabilité et une autonomie aux enseignants.
Force est de signaler que l'interdisciplinarité était à l'origine de l'apparition de nouvelles approches d'enseignement et d'apprentissage telle que l'enseignement par projet et l'éducation STEM[1].

[1] Science Technology Engineering Mathematics

L'éducation STEM pourrait être considérée comme un compromis en les approches radicale et relationnelle. Apparue aux États-Unis au début des années 2000, l'approche STEM vise à attirer plus d'étudiants dans les filières scientifiques et de répondre au besoin croissant de compétences dans ces secteurs d'activités. De nombreuses études (Kurup, Li, Powell et Brown, 2019) ont montré que cette approche d'enseignement doit commencer dès le début de la scolarité primaire et se poursuive à la fin du secondaire et au-delà. Au lieu d'enseigner les quatre disciplines séparément, le programme STEM propose de les intégrer dans un paradigme d'apprentissage cohérent qui montre comment les connaissances acquises dans des domaines spécifiques se complètent et se soutiennent mutuellement. Les élèves apprennent à appliquer les connaissances apprises dans les quatre matières dans dessituations qui relient la classe à son milieu. La méthodologie se fonde sur le développement de projets en lien direct avec des situations réelles.

6. LA PLACE DE L'INTERDISCIPLINARITÉ DANS LES PROGRAMMES TUNISIENS

Dans le souci de s'adapter aux exigences du XXIèmesiècle, la Tunisie a réformé, en 2002, son système éducatif. Cette réforme, qui adopte l'approche par compétences, vise à favoriser l'acquisition par les apprenants de compétences leur permettant de faire face à des situations complexes, en rapport avec leur environnement, et de résoudre les problèmes auxquels ils seront confrontés dans leur quotidien et dans leur vie de citoyen.

La loi d'orientation de l'éducation de 2002 confère à l'école, entre autres, la mission suivante :

> […] assurer aux apprenants une formation solide, équilibrée, multidimensionnelle, et les aider à maîtriser les savoirs et à acquérir lescompétences qui les préparent à apprendre tout au long de la vie ; à participer effectivement à la vie économique, sociale et culturelle … (Loi d'orientation de l'éducation, juillet 2002, p.45).

Dans la réforme de 2002, le choix a été fait de regrouper les disciplines en domaines, et ce dans un souci d'établir des liens entre des disciplines d'un même domaine de référence. Ainsi, cinq domaines d'apprentissage ont été retenus : langues, sciences, technologie, humanités et arts. D'un autre côté, le curriculum confère à l'école le rôle de développer un certain nombre de compétences transversales dont : exploiter l'information, résoudre des problèmes, exercer un jugement critique, coopérer, communiquer de façon appropriée.

Cela dit, nous notons que les concepteurs des programmes n'ont pas exprimé d'une manière claire le choix de l'approche interdisciplinaire dans l'enseignement. Ainsi, les mots *interdisciplinaires* et *interdisciplinarité* ne sont jamais énoncés dans les textes officiels des programmes. Mais au vu de ce qui est spécifié dans les textes officiels, il semble que les intentions des concepteurs du curriculum visent à inscrire le programme tunisien dans le cadre des finalités de l'interdisciplinarité, telles que précisées et identifiées par les chercheurs. En particulier, le fait de procurer aux apprenants une formation leur permettant de mobiliser leurs connaissances et les processus cognitifs adéquats pour résoudre des problèmes complexes dans différents contextes de la vie réelle.

En 2003, le ministère de l'éducation s'est lancé dans un projet pilote qui vise l'introduction de l'interdisciplinarité dans les écoles secondaires. Il a ainsi mobilisé des inspecteurs de l'éducation et des formateurs pour la mise en place d'un *enseignement par projet*. Cela a abouti en première étape à la production d'un guide intitulé « *Apprentissages optionnels. Apprendre autrement*[2]». Le guide présente les objectifs du projet, les domaines d'apprentissage à considérer, les compétences visées, l'organisation pédagogique et la

[2]Le titre est traduit. Le titre d'origine est « التعلمات الاختيارية. التعلّم بطريقة مغايرة»

méthodologie à adopter, les rôles de l'enseignant et de l'élève, les modes d'évaluation et des exemples de thèmes à implémenter dans le cadre de cet *enseignement par projet*. Le diagramme ci-dessous, extrait du guide, décrit les démarches à suivre pour l'élaboration d'un projet interdisciplinaire.

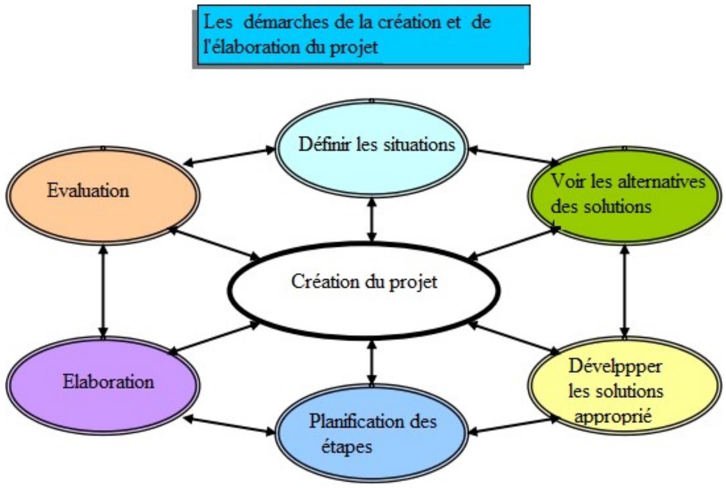


Figure 2*. Démarches à suivre pour l'élaboration d'un projet interdisciplinaire*

Dans une deuxième étape, une formation didactique et pédagogique, encadré par les inspecteurs et les conseillers pédagogiques, a été offerte aux enseignants qui ont accepté (volontairement) de participer à ce projet. La troisième étape était l'implémentation de cette expérience dans les écoles. Elle consistait, pour chaque niveau du cursus, de mettre les élèves en groupes autour de questionnements de la vie courante. On demande alors à chaque groupe d'apporter des éléments de réponses à leur questionnement, et ce en suivant les démarches scientifiques apprises et en convoquant les savoirs nécessaires dans les diverses disciplines enseignées. Au moins deux enseignants de disciplines différentes doivent superviser et encadrer le travail de chaque groupe tout au long du projet.
Ce projet pilote a été expérimenté pendant deux années. Sa généralisation s'est heurtée à beaucoup de résistances de la part des enseignants, du fait que leur syndicat n'a pas été impliqué dans la conception et la préparation du projet. D'un autre côté, des insuffisances sur le plan logistique et financier ont été constatées, et l'absence d'une culture de collaboration entre les enseignants a ajouté aux difficultés de cette expérience. Tous ces facteurs ont mis fin à ce projet.

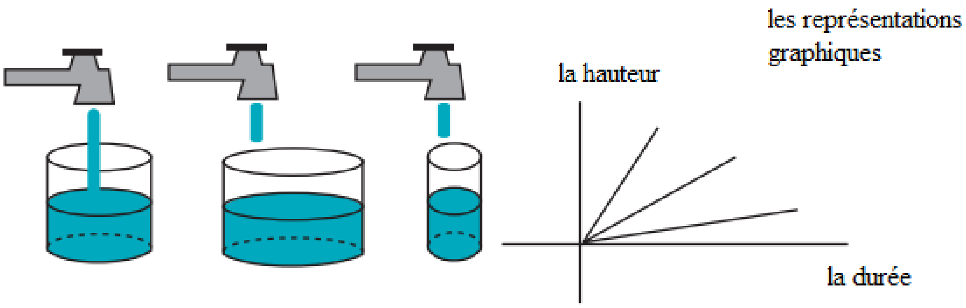
Une deuxième expérience autour de l'enseignement par projet : *la pédagogie de projet*, a été proposée en 2006 par le ministère de l'éducation aux enseignants du secondaire, et ce sur une base volontaire. Dans ce cadre, le ministère a chargé des inspecteurs de l'éducation dans diverses disciplines d'assurer la formation des enseignants qui ont accepté de participer à cette expérience.

Le guide donne les directives nécessaires quant à la manière de concevoir et d'implémenter un projet dans une approche interdisciplinaire telle que l'identification de la problématique, la collecte et l'analyse des données, la synthèse et la présentation des résultats, le développement de compétences transversales, la gestion du groupe élève, le rôle de l'enseignant et celui de l'élève, ainsi que les critères d'évaluation du projet.

Cela dit, nous notons que les auteurs des manuels tunisiens de mathématiques se sont inscrits timidement dans l'approche interdisciplinaire, et ce par la proposition de problèmes de modélisation ou de résolution de situations réelles empruntés à la vie courante ou qui concernent le contenu disciplinaire d'autres matières comme la physique, les sciences de la vie et de la terre…

Nous présentons ci-dessous de tels exemples de situations-problèmes extraits du manuel scolaire de mathématiques des classes de 7eannée et 8e année de base (élèves de 13-14 ans).

<u>Situation problème 1</u> :



On remplit les trois récipients de la même manière en comptant un litre par seconde. Les représentations graphiques représentent la hauteur de l'eau dans ces récipients selon la durée. Indique la représentation graphique qui correspond à chaque cylindre.

***Figure 3**. Situation-problème 1*

<u>Situation problème 2</u> :

La cellule paramécie est un organisme microscopique qui vit dans l'eau stagnante et se reproduit par la division en deux cellules chaque douze heures environ. On a mis deux cellules dans un récipient. Quel sera le nombre de cellules paramécie dans ce récipient après deux jours?

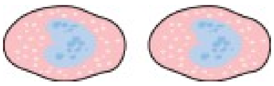


***Figure 4**. Situation-problème 2*

Dans chacun de ces deux exemples, l'élève est appelé à analyser la situation, à identifier les paramètres dont dépend le changement de l'état de la situation et ensuite à utiliser ses connaissances sur les situations de proportionnalité pour répondre à la question posée.

6. Conclusion

En guise de conclusion, chercheurs, formateurs et enseignants s'accordent sur l'importance de l'approche interdisciplinaire dans l'éducation et ses avantages dans les opérations d'enseignement et d'apprentissage. Malgré cela, la mise en œuvre en classe de cette approche connait beaucoup de contraintes de différents niveaux. Les enseignants ont du mal à adopter de façon autonome cette perspective dans leurs pratiques et à motiver leurs élèves à s'engager dans un apprentissage interdisciplinaire. Les directives des curricula interdisciplinaires, l'établissement de conditions matérielles propices et l'appui de l'institution scolaire représentent les piliers pour la mise en place de l'approche interdisciplinaire. L'approche STEM est la plus sollicité actuellement à travers le monde, favorisant une bonne mise en place en classe. Dans le milieu scolaire tunisien, des projets initiés par le ministère de l'éducation et des initiatives personnelles d'enseignants tentent de s'inscrire dans l'approche interdisciplinaire, toutefois, l'institution tunisienne rencontre des difficultés pour instaurer de façon officielle et générale cette approche. Une étudeplus approfondie de la mise en œuvre de cette approche dans les écoles et une évaluation des expériences réalisées restent un travail à accomplir.

BIBLIOGRAPHIE

BERTRAND, Y. (1980). « Disciplinarité ou interdisciplinarité », *Journal of Canadian Studies*, vol. 15(3).

CHARAUDEAU, P. (2010). « Pour une interdisciplinarité "focalisée" dans les sciences humaines et sociales », Questions de Communication, n°17, pp.195-222. Également disponible à http://www.patrick-charaudeau.com/Pour-une-interdisciplinarite.html

FOUREZ, G., MAINGAIN, A. et DUFOUR, B. (2002). *Approches didactiques de l'interdisciplinarité*. Bruxelles : De Boeck Université.

GUSDORF, G. (1974). Les sciences humaines et la pensée occidentale, t. I : De l'histoire des sciences à l'histoire de la pensée. Revue Philosophique de la France Et de l'Etranger 164 *(3):359-364.*

HASNI, A. LENOIR, Y. LAROSE, F. & SQUALLI, H. (2012). *Interdisciplinarité et enseignement des sciences, technologies et mathématiques au premier cycle du secondaire : place, modalités de mises en œuvre, contraintes disciplinaires et institutionnelles.* Rapport de recherche, université de Sherbrooke, CREAS.

KLEIN, J.T. (1990). - Interdisciplinary: History, theory, and practice. Detroit, Ml : Wayne State University Press. KLEIN J.T. (1990). - Interdisciplinary resources : A bibliographical reflection. Issues in Integrative Studies, 8, 35-67.

KLEIN, J.T. (1996). Crossingboundaries. Knowledge, disciplinarities, and Interdisciplinarities. Charlot-tesville, VA:UniversityPress of Virginia.

KURUP, P. M., LI, X., POWELL, G., & BROWN, M. (2019). Building Future Primary Teachers' Capacity in STEM: Based on a Platform of Beliefs, Understandings and Intentions. International *Journal of STEM Education*, 6, 1-4.

LEGRAND, L. (1986). *La différenciation pédagogique*. Paris : Scarabée.

LENOIR, Y. (1994). *Quelques modèles* didactiques à caractère interdisciplinaire*. Sherbrooke : université de Sherbrooke, faculté d'éducation (document du LARIDD, n° 2).

LENOIR, Y. (2001). L'interdisciplinarité dans la formation à l'enseignement : des lectures distinctes en fonction de cultures distinctes. In Y. Lenoir, B. Rey et I. Fazenda (dir.), *Les fondements de l'interdisciplinarité dans la formation à l'enseignement* (p. 17-36). Sherbrooke : Éditions du CRP.

LENOIR, Y et SAUVE, L. (1998a). L'interdisciplinarité et la Formation à l'enseignement primaire et secondaire. Quelle interdisciplinarité pour quelle formation? Introduction du numéro thématique: Interdisciplinarité et formation à l'enseignement primaire et secondaire. *Revue des sciences de l'éducation*, XXIV (1), 3-29.

LENOIR, Y. et SAUVE, L. (1998b). De l'interdisciplinarité scolaire à l'interdisciplinarité dans la formation à l'enseignement : un état de la question. 1. Nécessité de l'interdisciplinarité et rappel historique. *Revue française de pédagogie*, 124, 121-153.

LENOIR, Y. et HASNI, A. (2006). Les disciplines, la didactique des disciplines et le curriculum de formation à l'enseignement primaire : de la maîtrise à l'adéquation. *In Y. Lenoir et M.-H. Bouillier-Oudot (dir.), Savoirs professionnels et curriculum de formation* (p. 125-166). Québec : Presses de l'Université Laval.

MAINGUENEAU, D. (2010), *« Analyse de discours et champ disciplinaire », Questions de communication*, n°18, pp. 185-196.

MATHURIN, C. (2002). « Aspect de l'interdisciplinarité: essai de reconstitution d'un débat. ». Dans Lucie Gélineau et Carole Mailloux (dir.), *L'interdisciplinarité et la recherche sociale appliqué. Réflexions sur des expériences en cours*, Université de Montréal, Université Laval et Chaire d'étude Claire-Bonenfant sur la condition des femmes, octobre 2002, p. 7-39.

MORIN, E. (1990), « Sur l'interdisciplinarité », Carrefour des sciences, *Actes du Colloque du Comité National de la Recherche Scientifique Interdisciplinarité*, éditions du CNRS.

MORIN, E. (1994). « Sur l'interdisciplinarité », *Bulletin Interactif du Centre International de Recherches et Études transdisciplinaires*, n° 2 – juin

MASON, T. C. (1996). Integrated Curricula: Potential and Problems. *Journal of Teacher Education*, 47 (4), 263-270.

PEARS, D. (1992). « L'épistémologie de l'interdisciplinarité », in *Entre Savoirs, L'interdisciplinarité en acte : enjeux, obstacles*, Toulouse : Éditions Erès.

PIAGET, J. (1972). L'épistémologie des relations interdisciplinaires. In L. Apostel, G. Berger, A., Briggs, A. et Michaud, G. (dir.), *L'interdisciplinarité. Problèmes d'enseignement et de recherche dans les universités* (p. 131-144). Paris : Organisation de coopération et de développement économiques, Centre pour la recherche et l'innovation dans l'enseignement.

RESWEBER, J. -P (2011). *Les enjeux de l'interdisciplinarité. Aspects de l'interdisciplinarité : essai de reconstitution d'un débat.* Creutzer Mathurin

SINACEUR, M.A. (1983). - Qu'est-ce que l'interdisciplinarité ? In L. Apostel, J.-M. Benoist, T.B. Bottomore, K.E. Boulding, M. Dufrenne, M. Eliade, C. Furtado, G. Gusdorf, D. Krishna, W. J. Mommsen, E. Morin, M. Piatteli-Palmarmi, M.A. Sinacœur, S.N. Smirnov et J. Ui, *Interdisciplinarité et sciences humaines* (Tome I, p. 21-29). Paris : Unesco.

SMIRNOV, S.N. (1983). L'approche interdisciplinaire dans la science d'aujourd'hui : fondements ontologiques et épistémologiques, formes et fonctions. In L. Apostel, J.-M. Benoist, T.B. Bottomore, K. E. Boulding, M. Dufrenne, M. Eliade, C. Furtado, G. Gusdorf, D. Krishna, W. J. Mommsen, E. Morin, M. Piatteli-Palmarini, M.A. Sinaceur, S.N. Smirnov et J. Ui, *Interdisciplinarité et sciences humaines* (Tome I, p. 53-71). Paris : Unesco.

SAMSON, G. (2007). *Enseigner les sciences en intégrant les mathématiques et ainsi favoriser le transfert des apprentissages*. Dans P. Potvin, M. Riopel et S. Masson (dir.), Enseigner les sciences : regards multiples (pp. 411-426). Québec, QC : Éditions multiMondes.

SAMSON, G., MUTIMBUTIMBU, D-B., LECLAIR, J-M. (2008). *Des liens à favoriser entre les mathématiques et les sciences au secondaire*. Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec GDM 2008. Enseignement des mathématiques et interdisciplinarité. Université de Sherbrooke. p. 159-170.

SAMSON, G., HASNI, A. & DUCHARME-RIVARD, A. (2012). *Constats et défis à relever en matière d'intégration et d'interdisciplinarité : résultats partiels d'une recension d'écrits*. McGill Journal ofEducation / Revue des sciences de l'éducation de McGill, 47*(2)*,193-212. https://doi.org/10.7202/1013123ar

VIDAL, V. (1992). *« Quelques réflexions sur l'interdisciplinarité. La méthode interdisciplinaire rend-elle caducs les savoirs spécialisés ?* » Dans Portela.

Documents officiels

Loi d'orientation de l'éducation, juillet 2002.

Rapport OCDE (2018), le projet : Le Futur de l'éducation et des compétences : Éducation 2030, Éditions OCDE.

République Tunisienne, Ministère de l'éducation et de la formation, Guide « apprentissages optionnels, Apprendre autrement ». Centre National Pédagogique, (2003)

République Tunisienne, Ministère de l'éducation et de la formation, Livre de Mathématiques, 7 ème année de l'enseignement de base, Centre National Pédagogique, code 102 707.

République Tunisienne, Ministère de l'éducation et de la formation, Livre de Mathématiques, 8 ème année de l'enseignement de base, Centre National Pédagogique, code 102 805.

République Tunisienne, Ministère de l'éducation et de la formation, Projet Annuel de Performance Mission Education Année 2022.

Le raisonnement inductif dans l'enseignement secondaire tunisien : Interaction entre les mathématiques et l'informatique

Walid Soltani
ISEFC-Université virtuelle de Tunis

RÉSUMÉ

Les raisonnements, inductif et par récurrence, sont considérés comme étant des concepts clés dans l'enseignement et dans apprentissage des élèves, tant dans la classe mathématique que dans d'autres disciplines (Physiques, chimie, informatique, Biologie etc.). Certains élèves rencontrent des difficultés de compréhension de ces concepts dans la démarche qu'ils effectuent pour produire une preuve pertinente. Pour contribuer à la réflexion sur l'importance de ces concepts, nous présentons d'une part une étude historique, épistémologique et didactique de ces concepts et d'autre part l'interaction entre les mathématiques et l'informatique, en particulier le lien entre les concepts de récurrence et de récursivité. L'objectif est de soulever certaines ambiguïtés d'enseignement-apprentissage du raisonnement inductif et par récurrence en mathématique et la récursivité en informatique.

Mots-clés : Raisonnement inductif, induction incomplète, induction complète, récurrence, récursivité, algorithme récurrent.

1. INTRODUCTION

Le raisonnement inductif ou par récurrence a une place non négligeable en mathématiques, il joue un rôle très important pour démontrer, vérifier, conjecturer ou généraliser des propriétés, etc. L'éclairage historique, épistémologique et didactique permet de préciser l'importance du raisonnement inductif dans le développement des mathématiques et des sciences en général et de dégager des éléments essentiels pour comprendre ce concept et pour pouvoir mettre en œuvre ce raisonnement en particulier. L'histoire montre que ce raisonnement a été l'un des domaines des mathématiques où apparaissent clairement ses liens avec d'autres disciplines scientifiques. En considérant que le raisonnement inductif est un concept favorisant l'interdisciplinarité.
L'analyse didactique de l'induction mathématique ou raisonnement par récurrence fait ressortir certaines difficultés de compréhension chez les apprenants. Nous pouvons noter que ces difficultés sont généralement liées aux trois dimensions : technique, mathématique et conceptuelle (Grenier, 2012; Gardes, Gardes et Grenier, 2016; Soltani; 2019).
Dans notre travail, nous proposons de décrire la dévolution de l'apprentissage des raisonnements inductifs en général et par récurrence en particulier en présentant l'interaction entre mathématique et informatique. Dans une première partie nous présentons un point de vue historique, épistémologique et didactique sur le raisonnement inductif et par récurrence. Dans une deuxième partie, nous étudions la place du raisonnement inductif dans les textes officiels des programmes des mathématiques à la fin de l'enseignement secondaire; en mettant l'accent sur l'interdisciplinarité. Dans la dernière partie, nous nous intéressons au lien entre la récurrence et la récursivité dans l'interaction entre les mathématiques et l'informatique.

2. BREF APERÇU HISTORIQUE ET ÉPISTÉMOLOGIQUE SUR LE RAISONNEMENT INDUCTIF ET PAR RÉCURRENCE

L'induction porte sur le passage du particulier au général, nous mène á la connaissance d'une vérité générale (Arnaud et Nicole, 1965).

Vidal (2005) effectue une étude historique et épistémologique du raisonnement par récurrence ou (par induction). Il identifie que l'origine du principe de récurrence est très controversée. Certains historiens ont dit que c'est Euclide qui en est à la source alors que d'autres ont dits qu'il s'agit de Maurolico (1494–1575) ou de Pascal (1623–1662). En fait, cela dépend de ce que l'on entend par "origine du principe de récurrence" : soit l'utilisation de l'induction *incomplète*[1]qui en a été l'élément déclencheur, soit sa formalisation qui en fait une démarche rigoureuse et fiable. Il semblerait que Pascal soit le premier à avoir rédigé de manière formelle ce raisonnement. On doit tenir compte de l'apport des nombreux mathématiciens qui ont réalisé des recherches postérieures à Pascal (1954), parmi eux Peano (1858–1932) qui a formulé les cinq axiomes permettant de construire l'ensemble IN.
Il a fallu énormément de temps pour que le raisonnement par récurrence soit accepté par la communauté mathématique en tant que moyen de démonstration valide. Deux obstacles ont engendré cette difficulté d'acceptation. D'une part, l'utilisation de l'induction *incomplète* pour des résultats qui ont mené des généralisations erronées; d'autre part, l'intervention de l'infini dans ce raisonnement.
L'induction *incomplète* était utilisée par les mathématiciens avant la formalisation du raisonnement par récurrence (induction *complète*) malgré qu'elle engendre des incompréhensions, et un débat entre les philosophes, les mathématiciens et les empiristes. De nos jours, l'induction *incomplète* est utilisée non seulement en mathématique mais aussi dans des disciplines scientifiques (physique, biologie, informatique, etc.). Selon le philosophe et mathématicien Henri Poincaré (1854–1912), l'induction utilisée dans le domaine mathématique est le principe de *récurrence*. Dans les autres domaines scientifiques, l'induction utilisée correspond á l'induction *incomplète*. Nous illustrons ces propos par un extrait de la science et l'hypothèse de Poincaré qui selon lui :

> L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est toujours en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même. (Poincaré, 1902, cité par Grenier, 2012, p. 27)

Égré (2015) effectue une étude historique et épistémologique de la récurrence et montre bien que les justifications qu'en donnent Poincaré, Frege et les formalistes (par exemple Hilbert) diffèrent à l'évidence les unes des autres, ce qui témoigne la difficulté de la réduire à un principe qui irait de soi. En effet, le fondement de l'induction chez Poincaré est un acte de l'esprit, qui condense une infinité d'inférences logiques. L'induction suit d'une définition explicite de la notion de nombre entier naturel chez la logiste Frege. Enfin, la question qui concerne le fondement de la récurrence, est un faux problème, l'induction est un axiome parmi d'autre.

3. TRAVAUX DIDACTIQUES SUR LES RAISONNEMENTS, INDUCTIF ET PAR RÉCURRENCE

3.1 Raisonnement inductif

En didactique des mathématiques le raisonnement inductif prend différents sens : Pólya (1968) caractérise l'induction comme « une manière de raisonner qui conduit à la découverte de lois générales en partant de l'observation d'exemples particuliers et de leur combinaison » (p. 110). Selon Pedemonte (2002) :« l'induction est une inférence ampliative qui conduit à la construction

[1]C'est à dire à une généralisation établie sur la base des cas particuliers.

de connaissances nouvelles à partir de l'observation de cas particuliers que l'on généralise à un ensemble plus vaste de cas». L'induction est l'inférence d'une règle à partir d'un cas (ou d'un ensemble des cas). Pedemonte (2002) et Cabassut (2005) reprennent tous deux une des caractérisations de Peirce (s.d.) pour définir le pas inductif comme un raisonnement de la forme données-résultat donc règle.

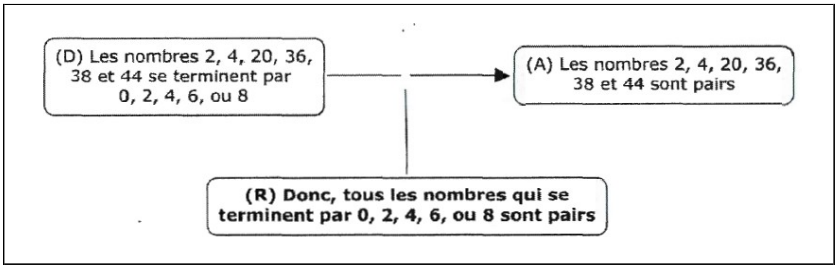


Figure 1*. Exemple d'un pas inductif (Jeannotte 2015, p.167)*

Un pas de raisonnement mathématique peut aussi être décrit à l'aide d'un fondement qui est attaché à la règle et d'une valeur épistémique attachée à la conclusion.
L'exemple de la Figure1présente l'inférence inductive où une règle est inférée à partir de données (le chiffre des unités de certains nombres) et d'un résultat (tous ces nombres sont pairs). La conclusion, ou règle, est représentée en gras. Le raisonnement inductif mène à une inférence vraisemblable du point de vue épistémique.
Jeannotte (2015) généralise le schéma d'un pas inductif en présentant la figure (Figure 2) suivante :

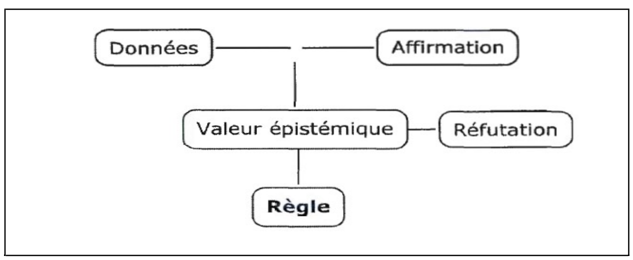


Figure 2*. Le schéma d'un pas inductif (Jeannotte, 2015, p. 168)*

Jeannotte (2015) mentionne que le raisonnement inductif joue un rôle dans la généralisation de régularité. Selon Duquesne (2003) : « L'inférence inductive s'exerce sur des régularités observées à partir desquelles on peut tirer des conclusions plus générales. »[2]. Ainsi, il s'agit de passer du particulier au général. Selon Jeannotte, la généralisation, l'abstraction, l'analogie et la particularisation sont nécessaires au *processus* d'induction.

Pour les raisonnements inductifs, il semble alors utile de prendre en compte *l'aspect processuel* du raisonnement. Elle les distingue en deux catégories : les processus de recherche de similitudes et de différences, comme généraliser, conjecturer, identifier une régularité, comparer et classifier; et les processus de recherche de validation.

3.2 Argumentation inductive

Pedemonte (2002) a distingué trois types d'argumentation inductive : Argumentation inductive par généralisation ; par passage « à la limite » et par récurrence. Nous nous intéressons á l'argumentation par récurrence qui est en lien avec la récursivité en informatique.

[2]Duquesne, 2003, p. 18. Cité par Jeannotte, 2015, p.148.

L'argumentation inductive par récurrence se base sur une généralisation sur un entier naturel n. A partir d'une propriété vraie sur un cas P(1), et la découverte d'une relation récurrente entre deux cas successifs, on relie pour un entier un entier naturel n, P(n) et P (n+1).

La conclusion du raisonnement est que la règle P(n)⇒P(n+1) est vraie. L'explicitation de cette règle P(n)⇒P(n+1) est le produit d'une généralisation sur le processus. Les deux cas P(n) et P(n+1) suivent un ordre particulier; ils ne sont pas considérés par hasard. La généralisation sur le processus est donc à la base d'une argumentation inductive par récurrence. De plus, sans la généralisation sur le processus il n'y a pas d'argumentation déductive par récurrence. L'argumentation par récurrence est ce que Harel appelle quasi-induction (Harel, 2001). Selon Pedemonte, la quasi-induction, est caractérisée par : la découverte d'une relation récurrente l'utilisation de cette relation sur des cas bien ordonnés, reliés entre eux, par exemple dérivation de P(2) de P(1), P(3) de P(2) etc., l'utilisation de la méthode de montée et de descente. Dans la méthode de montée, on commence à établir P(1) et ensuite on montre comment dériver P(2) de P(1), P(3) de P(2), etc. Finalement on déclare que le raisonnement peut être fait sur toute la séquence. Dans la méthode de descente, on dérive P(n+1) de P(n) et on déclare que le raisonnement peut être fait sur la séquence entière en commençant de P(1), qui est établi séparément. (Harel, 2001).

3.3 L'incompréhension et les difficultés des apprenants du concept la récurrence

La récurrence n'est pas enseignée comme étant un concept. En effet, elle semble se limiter à une manipulation algébrique et mécanique des étapes (Harel, 2001); elle devient ainsi une technique qui permet d'obtenir des résultats généraux à partir d'un nombre de cas particuliers (Harel, 2001; Dogan, 2016) ou une technique de preuve mal comprise (Grenier, 2012 ; Gardes, Gardes et Grenier, 2016) ou un algorithme (Soltani, 2019). En mathématiques, le raisonnement par récurrence a la double spécificité de permettre la construction d'objets et d'être un outil de preuve fondateur de nombreux résultats en mathématiques discrètes (Grenier, 2012). Dans l'enseignement, le concept de récurrence est peu utilisé, souvent mal compris (Soltani, 2019), en partie parce qu'il nécessite une certaine maîtrise de connaissances de logique mathématique. Or de nombreux travaux didactiques ont montré l'importance d'une prise en charge effective dans l'enseignement des notions de logique. Certains de ces travaux se sont centrés sur la notion d'implication (Fabert & Grenier, 2011), ou la quantification implicite dans les propositions implicatives (Durand-Guerrier, 2005). D'autres travaux ont montré l'importance de la construction par les élèves et les étudiants d'un langage logique précis (Chellougui, 2003 & 2009, Durand-Guerrier, 2005, Mesnil 2014).

Au niveau épistémologique, Grenier (2012) souligne qu'il est nécessaire de clarifier le concept de la récurrence afin de pouvoir comprendre le sens de ce principe, et de le discuter au niveau didactique : Les quantificateurs « il existe » et « pour tout » sont indispensables pour comprendre le sens de ce principe ; ils sont souvent implicites dans l'enseignement, et parfois remplacés par des formulations inadéquates. L'implication doit être comprise au sens de la logique mathématique. Par exemple ($P(n) \Rightarrow P(n+1)$) peut être vraie pour des valeurs de n pour lesquelles $P(n)$ est faux. C'est-à-dire qu'une propriété peut être héréditaire à partir d'un certain rang, et n'être cependant jamais vraie. La vérification de « l'initialisation » est donc nécessaire. Le rapport du principe de récurrence avec l'infini est souvent une source de difficultés. La complexité est due au fait que l'on prétend démontrer une propriété relative à un nombre fini d'éléments, mais en étudiant seulement une valeur générique n. En fait, ce rapport avec l'infini n'est pas l'essentiel des obstacles à sa compréhension; on peut l'aborder autrement.

Gardes, Gardes et Grenier (2016) font l'hypothèse que les difficultés rencontrées par les élèves/étudiants pour mettre en œuvre et rédiger un raisonnement par récurrence sont liées aux ambiguïtés de rédactions repérées dans les manuels scolaires et dans les corrigés rédigés par les enseignants. Ceci révèle un manque de compréhension du principe de récurrence. Ils soutiennent que les enseignants qui le pratiquent pensent parfois à aider les élèves à bien distinguer la variable générique de la variable quantifiée universellement, mais ils précisent que les enseignants doivent se rendre compte qu'ils créent un indicateur non-pertinent de validité du raisonnement par récurrence. Dans leur étude, ces auteurs évoquent plusieurs difficultés d'étudiants dans leur analyse d'un questionnaire comportant trois parties : difficultés qui concernent la rédaction d'une preuve par récurrence; difficultés techniques pour développer une preuve par récurrence; difficultés dans le changement de variable, en effet, l'utilisation d'une variable fictive dans l'étape d'hérédité (comme n=k) est source de certaines difficultés chez les apprenants qui sont habitués à utiliser et manipuler la variable n.
L'analyse didactique de notre recherche en master (Soltani, 2019) a mis en évidence la complexité d'un enseignement-apprentissage du raisonnement par récurrence en Arithmétique. En effet, une maîtrise des notions logiques en particulier : implication, quantification, disjonction, s'avère indispensable pour une meilleure compréhension de ce type de raisonnement. Ainsi ce raisonnement enseigné comme un algorithme engendre certaines difficultés chez des élèves. Ces difficultés sont repérées dans les erreurs commises par ces élèves effectuées dans une preuve mathématique. Parmi les erreurs de type syntaxique :il ya une omission de l'implication et du quantificateur dans l'étape d'hérédité. En plus, on trouve un mauvais usage de l'implication ou du quantificateur á cette étape. Et les erreurs de type sémantique : Attribuer un sens erroné aux symboles d'équivalences et du quantificateur universel. Ainsi, l'explication de la vérification de l'initialisation n'a aucun sens. Enfin les erreurs de type mixte : succession des phrases sans lien logique lors de la justification l'étape d'hérédité, erreur de la traduction du symbole $\Longrightarrow$ au symbole$\Longleftrightarrow$ et mauvaise utilisation du quantificateur qui attribue un sens erroné d'expression.
Pour notre communication, nous illustrons ce propos par des exemples extraits de nos travaux de recherche (Soltani, 2019). Il s'agit des productions de deux groupes de 4 élèves de la situation suivante : "*Démontrer par récurrence que : Pour tout entier naturel n ; B(n) =* $7^n - 2^n$ *est divisible par 5*". Nous désignons ces groupes par Groupe A et Groupe B.

L1 Pour n=0, on a B(0)=0 donc B(0) vrai	
L2 • on suppose que B(n)=7^n–2^n est divisible par 5	
L3 Jusqu'à l'ordre n.	
L4 • on montre que B (n+1)=7^{n+1}–2^{n+1} est divisible par 5	
L5 En effet : B (n+1)=7^{n+1}–2^{n+1}=7.7^n–2.2^n	
L6	=$7(7^n–2^n) +7.2^n+2(–2^n+7^n) –2.7^n$.
L7	=$B(n) (7+2) +7.2^n–2.7^n$.
L8	=$9B(n) +7. 2(2^{n-1}–7^{n-1})$
L9	=9B(n) –14B (n–1)
L10 B (n–1)= 7^{n-1}–2^{n-1}.	

Tableau 1. *Preuve de la situation produite par le Groupe A*

Dans cette preuve, d'une part, la propriété P(n) à démontrer n'est pas identifiée et d'autre part, l'initialisation n'est pas vérifiée. L'expression présentée dans L1 n'est pas explicitement vérifiée. L'étape de l'hérédité (L2-L5) n'est pas justifiée. En effet, l'implication est implicite, l'entier naturel n n'est pas introduit, la formulation de B(n+1) à partir de B(n) n'est pas justifiée, les manipulations algébriques (factorisation, division euclidienne et combinaison linéaire) qui sont utilisées pour démontrer que "B(n+1) est divisible par5" ne sont pas pertinentes. La conséquence de la récurrence est absente.

L1 B(n)=7^n -2^n / 5.
L2 pour n=0
L3 $7^0 – 2^0$=0 divisible par5
L4 vrai
L5 on suppose qu'elle est divisible par 5 et montrons qu'elle est
L6 vrai et on la démontré l'ordre de (n+1)
L7 7^{n+1}-2^{n+1} = 7^n.7 - 2^n.2
L8 = 7.7^n - 2^n. (7-5)
L9 = (5+2). 7^n - 2^n.2

Tableau 2. *Preuve de la situation produite par le Groupe B*

Ce groupe ne prend pas en considération l'étape d'identification de la propriété P(n), l'étape d'initialisation est mal vérifiée. En effet, les expressions de cette étape au niveau de L1, L2 et L3 portent des erreurs mixtes et leur sens est perdu. L'étape d'hérédité est exprimée de la ligne L5 jusqu'à L6 par :"*on suppose qu'elle est divisible par 5 et montrons qu'elle est vrai et on la démontré l'ordre de (n+1)*" qui présentent des erreurs mixtes vu l'absence de l'introduction de la variable n, les propriétés P(n) et P(n+1) ne sont pas présentés, et l'omission du connecteur logique « *implique* ». La conséquence de la récurrence est absente.

4. L'INTERDISCIPLINARITÉ ET LE RAISONNEMENT INDUCTIF DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES TUNISIEN

L'enseignement des mathématiques en Tunisie se dirige vers un décloisonnement ou une intégration entre les mathématiques et les autres disciplines (physique, biologie, Informatique...). Nous pouvons lire dans les programmes des mathématiques de 2008 :

> Les mathématiques contribuent à former les esprits des élèves dans la mesure où elles leur permettent de développer leurs capacités de raisonnement, d'analyse et d'abstraction. Elles favorisent la créativité et développent l'imagination et l'intuition. C'est une discipline qui, quand elle est bien enseignée, peut procurer de la joie et de la satisfaction. En interagissant avec les autres disciplines et l'environnement, les mathématiques contribuent à leur développement. Elles permettent de comprendre les phénomènes et favorisent les prises de décisions. En tant que langue, les mathématiques offrent un moyen de communication précis, rigoureux, concis et universel. (Programmes des Mathématiques, 2008, p. 1)

Les textes officiels des programmes des mathématiques recommandent des interactions des mathématiques avec différentes disciplines scientifiques. Également, les manuels scolaires ne proposent pas des situations en lien avec les autres disciplines. Il y a absence d'une réelle complémentarité des contenus cognitifs provenant des différentes disciplines.

Notons, par ailleurs, que l'un des objectifs de l'enseignement des mathématiques est de faire entrer les élèves dans la rationalité mathématiques, notamment la pratique des raisonnements. En effet, ce programme introduit le raisonnement comme étant une base nécessaire à l'apprentissage des mathématiques.

> A travers des activités écrites ou orales, les élèves développeront leurs aptitudes à chercher, expérimenter, conjecturer, ou contrôler un résultat. De même, ils

> développeront des chaînes de raisonnement inductif, déductif, par l'absurde ou par récurrence. (Programmes des Mathématiques, 2008, p. 3).

5. LA RÉCURRENCE ET LA RÉCURSIVITÉ : INTERACTION ENTRE LES MATHÉMATIQUES ET L'INFORMATIQUE

5.1 Définitions :

Nous présentons l'intégration des concepts mathématiques en particulier la récurrence et la récursivité dans l'enseignement de l'informatique, ce qui permet d'apporter un éclairage sur le lien entre récurrence et récursivité. Nous montrons quelques exemples d'application en logique, informatique et mathématiques, susceptibles d'intéresser les professeurs pour enseigner le raisonnement par récurrence.

Raisonnement par récurrence : il s'agit d'un type de raisonnement que l'on applique pour prouver des propriétés des entiers naturels.

Un énoncé classique est le suivant:

SI [il existe un entier naturel n_0 tel que « p (n_0) est vraie » ET « pour tout entier naturel $n \geq n_0$, p(n) implique p (n+1) est vraie»] ALORS [pour tout entier naturel $n \geq n_0$, p(n) est vraie].

Dans ce raisonnement il y a usage, dans le langage naturel, des connecteurs logiques *implication* et *conjonction* et également du *quantificateur universel*.

L'énonce de ce raisonnement dans le formalisme logico-mathématique est le suivant :

$$[p(n_0) \text{ et } (\forall\, n \geq n_0), (p(n) \Rightarrow p(n+1))] \Rightarrow (\forall n \geq n_0), p(n).$$

Récursivité : la récursivité est un concept que l'on retrouve fréquemment dans la vie quotidienne : des histoires à l'intérieur des histoires, des films à l'intérieur des films, des tableaux dans des tableaux etc. En terme informatique, un objet est dit récursif, s'il se contient lui-même ou s'il est défini à partir de lui-même.

Le concept de récursivité est spécialement mis en valeur dans les définitions mathématiques. Il s'agit d'une technique très efficace pour résoudre des problèmes rapidement, simplement et avec moins d'objets intermédiaires. Par contre le principal problème est de déterminer l'instruction (ou les instructions) qui représentent le point d'arrêt pour que le programme se termine dans tous les cas.

Algorithme récurrent : Un algorithme ou un traitement est dit récurrent s'il utilise un procédé itératif ou récursif pour engendrer un résultat qui peut dépendre de p résultats précédents, nous parlons alors d'un algorithme ou d'un traitement récurrent d'ordre p. Voici un exemple :

> Le calcul des suites est un exemple des algorithmes récurrents. Par exemple la suite de Fibonacci :
> *Pour un entier naturel* $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ *est la base d'un algorithme récurrent d'ordre 2.*

5.2 Exemples d'applications de la récursivité

Nous citons ci-dessous des exemples d'applications[3]enseignés aux élèves de 4[ème] année section sciences de l'informatique (d'âges 18 a19ans). Ces exemples sont extraits des notes de cours d'enseignants d'informatique de différents lycées.

[3]Les algorithmes des applications sont placés aux annexes.

Exemple 1 : Calcul de la factorielle d'un entier positif n (Algorithme1).
On doit avoir à partir de cet algorithme : fact(1) = 1*fact(0)=1*1=1,
fact(2) = 2*fact(1)=2*1=2, fact(3) = 3* fact(2) =3*2=6 etc.

Exemple 2 : Reconnaitre la parité d'un entier naturel n en utilisant la connaissance de la parité de n–1(Algorithme2).

Exemple 3 : Calcul des termes d'une suite :

- Une suite récurrente d'ordre 1 : Proposez l'algorithme de la procédure TERME-N qui affiche les n premiers termes de la suite définie par : $U_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 2U_n + 1{,}5$ (Algorithme3)
- La suite de Fibonacci : est une suite récurrente d'ordre 2 dont chaque élément obéit á la relation de récurrence suivant :
  $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et Pour tout entier $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
  Pour un entier n donné, calculer le $n^{ème}$ terme de la suite de Fibonacci.
  Écrivez les fonctions Fibo (respectivement solution itérative sans tableau et solution récursive) (Algorithme 4)

5.3 Lien entre la récurrence et la récursivité

Quelques auteurs ont mis le lien entre récurrence et récursivité :

Leron et Zazkiz (1986) ont mentionné que la maîtrise préalable de la récursivité pourrait faciliter l'apprentissage de la preuve par récurrence.

Anderson (1992) a signalé que les problèmes qui peuvent être résolus récursivement sont ceux qui ont une solution *inductive*.

Polycarpou (2006) explore la corrélation entre la compréhension des définitions inductives et des preuves par récurrence chez des étudiants de licence en informatique. Les résultats de cette étude ont montré d'une part, que les étudiants qui avaient une meilleure compréhension des définitions inductives de structures, obtenaient des meilleurs résultats dans l'application d'une preuve par récurrence, et d'autre part que ceux qui comprenaient moins les définitions inductives avaient tendance à appliquer mécaniquement le raisonnement par récurrence

Finalement, Léon et Modeste (2020) présentent le concept d'induction structurelle, qui permet d'apporter un éclairage sur le lien entre récurrence et récursivité. Ils montrent quelques exemples d'applications en logique, informatique et mathématiques, susceptibles d'intéresser les professeurs chargés de l'enseignement du raisonnement par récurrence ou, dans le futur, de la récursivité.

L'induction est la dernière étape de la démarche expérimentale dans les sciences de la nature, mais néanmoins présente en mathématiques Nous allons voir que l'expérience, même si elle est utilisée comme méthode heuristique et de contrôle par le mathématicien, elle n'était jamais capable de fournir ce degré de certitude qui caractérise la mathématique á cause de l'existence de risque des inductions incomplètes fausses (Vidal; 2005) :

Le premier exemple d'Euler[4] en 1780 étudie la suite (f_n) définie sur IN par : $f_n = n^2 – n + 41$. On pourrait être tenté de dire que la suite ne donne que des nombres premiers pour les différentes valeurs de n. De fait, seules les 40 premières valeurs sont des entiers premiers. $f_{41} = 1681 = 41^2$

[4] Cité par Vidal (2005), pp. 212-214.

n'est pas premier, bien évidemment. Le test pour 41 réfute l'idée suivant laquelle n^2–n+41 est premier pour toute valeur de n.

La deuxième induction fausse celle de Fermat[5] en 1657 : il considère que les nombres F_n de la forme $2^{2^n}+1$ sont premiers après une induction *incomplète*. Il est noté que cette induction conduit á un résultat faux comme le prouvera Euler un siècle plus tard, en 1732. En effet, le sixième de ces nombres : $2^{32} + 1$ indiqué par Fermat comme premier est divisible par 641.

Alors l'informatique, plus précisément la récursivité á l'aide d'un algorithme récurrent peut jouer aussi le rôle de confirmation ou d'infirmation d'induction incomplète car l'induction totalisante est difficile á partir d'une expérimentation mentale en raison de son rapport avec l'infini.

Le raisonnement inductif et par récurrence sont maintenant essentiels dans l'éducation selon leurs pertinences et leurs utilités. La théorie de récursivité en informatique est pratiquement l'étude de ces raisonnements en mathématique appliquée aux algorithmes récurrents.

6. CONCLUSION

Dans notre travail, l'étude épistémologique et didactique nous a permis la distinction entre les concepts suivants : l'induction *incomplète* et *complète* (par récurrence). Cette distinction rend l'enseignement apprentissage du concept du raisonnement inductif de plus en plus complexe. Néanmoins, de nos jours l'induction *incomplète* utilisée dans d'autres disciplines scientifiques (physiques, biologie, chimie etc.) c'est-à-dire une généralisation établie sur une base de cas particuliers. Dans le domaine mathématique, l'induction utilisée est l'induction *complète* qui permet de démontrer véritablement un résultat générateur, mais parfois il faut passer par des phases d'induction incomplète.

La formalisation du raisonnement par récurrence comme étant un raisonnement inductif *complet* prend énormément de temps pour être accepté par la communauté mathématique en tant que moyen de démonstration valide. Plusieurs études en didactiques des mathématiques montrent des difficultés cognitives importantes sur ce type de raisonnent rencontrées par les apprenants. Les auteurs ont organisé ces difficultés en trois catégories : Technique, mathématique et conceptuelle. De nombreux facteurs associés à ces difficultés. Les preuves identifient que la connaissance du continu mathématiques a joué un rôle dans des difficultés (Baker, 1996; Harel, 2001). Aussi sont liées aux ambiguïtés de rédactions repérées dans les manuels scolaires et dans les corrigés rédigés par les enseignants (Grenier, 2012, Gardes, Gardes et Grenier, 2016, Soltani, 2019).

Cette étude nous permet de mettre en évidence le lien entre la récurrence et la récursivité. Ce lien favorise l'interdisciplinarité entre l'informatique et mathématiques pour une meilleure compréhension de ces concepts chez les apprenants. Dans les perspectives de cette étude, il serait intéressant d'implémenter des situations didactiques visant l'enseignement conjoint de notions suivantes: raisonnement inductif, par récurrence, et récursivité au lycée.

BIBLIOGRAPHIE

ANDERSON, O. D. (1992). Induction, recursion, and the towers of hanoi. *International Journal of Mathematical Education in science and technology*, 23(3), 339-343

ARNAUD, A. et NICOLE, P. (1965). La logique ou l'art de penser, Flammerion, collection champs.

BAKER, J. (1996). Students' difficulties with proof by mathematical induction. New York.

[5] Cité par Vidal (2005), pp. 214-215

CABASSUT, R. (2005). Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne. Thèse de doctorat. Univ. Paris Diderot.

CHELLOUGUI, F. (2003). L'utilisation des quantificateurs dans l'enseignement secondaire tunisien. *L'Ouvert*, n°108, pp.25-33.

CHELLOUGUI, F. (2009). L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite. *RDM*, Vol.29, n°2, pp.123-154.

DOGAN, H. (2016). Mathematical Induction: deductive logic perspective. European Journal of Science and Mathematics Education, 4(3), 315-330.

DUQUESNE, F. (2003). *Apprendre à raisonner en mathématiques à l'école et au collège* (2e ed.). Suresnes, France: Éditions du Centre national d'études et de formation pour l'enfance inadaptée.

DURAND-GUERRIER, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique.* HDR, , IREM de Lyon.

ÉGRÉ, P. (2015). Le raisonnement par récurrence : quel fondement ? *Gazette des Mathématiciens*, (146), 27-37.

FABERT, C. et GRENIER, D. (2011). Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique. In Petit x, numéro 87, IREM de Grenoble, pp. 31-52.

GARDES, D., GARDES, M.-L. et GRENIER, D. (2016). État des connaissances des élèves de terminale S sur le raisonnement par récurrence. Petit x, 100, 67-98.

GRENIER, D. (2012). Une étude didactique du concept de récurrence, Petit x, N°88, pp. 27-47.

HAREL, G. (2001). The Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme: A Model for DNR-Based Instruction. In S. Campbell & R. Zazkis (Eds.). *Learning and Teaching Number Theory*. (pp. 185-212). New Jersey, Ablex Publishing Corporation.

JEANNOTTE, D. (2015). *Raisonnement mathématique : Proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire*. Thèse de Doctorat. Université de Montréal.

LEON, N et MODESTE, S. (2020). Récurrence et récursivité á l'interface des mathématiques et de l'informatique. Repères-IREM, N^{0}119, pp. 45-63.

LERON, U. et ZAZKIS, R. (1986). Computational recursion and mathematical induction. *For the learning of Mathematics*, 6(2), 25-28.

MESNIL, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot.

PASCAL, B. (1954), *Traité du triangle arithmétique in Œuvres complètes*, Paris, N. R. F, Gallimard, Bibliothèque de la Pléiade.

PEDEMONTE, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Thèse de doctorat. Grenoble.

POINCARE, H. (1902). *La science et l'hypothèse.* Flammarion, Paris.

POLYA, G. (1968). *Mathematics and plausible reasoning* (2e ed., vol. 1). Princeton, NJ :Princeton University Press.

POLYCARPOU, I. (2006). Computer science students' difficulties with proofs by induction : an exploratory study. In *Proceedings of the 44th annual southeast regional conference* (P.601-606).ACM

SOLTANI, W. (2019). *Une approche didactique des deux raisonnements par récurrence et par disjonction des cas en arithmétique en 3ème année secondaire section Mathématiques*. Mémoire de master de didactique des mathématiques. ISEFC-Université Virtuelle de Tunis.

VIDAL, R. (2005). *Étude historique et critique de méthodes de démonstration en arithmétique, à paraître.* Thèse de doctorat de philosophie, Université Jean Moulin, Lyon III.

Programme de l'enseignement secondaire

-*Programmes Officiels de l'Enseignement Secondaire, Mathématiques.* (2008), République Tunisienne ministère de l'Éducation et de la formation, Direction de la Pédagogie et des Normes du cycle préparatoire et de l'enseignement secondaire.

ANNEXES

Algorithme1 *:* Fact (n) Si n=0 alors | retourner 1 Si non | retourner n*fact (n-1) Fin	***Algorithme 2****:* Donnés : un entier positif ou nul n Résultat : retourne vrai si n est pair, faux si non Si n=0 alors | retourner vrai Si non | retourner Est impair (n-1) Fin
Algorithme 3: Procédure TERME-N (n : entier) Début U←5 Ecrire (u) U←2*U+1,5 Ecrire (U) Fin pour Fin	***Algorithme4 :*** *De la fonction Fibo-récursive :(solution récursive)* Fonction Fibo (n : entier) : entier Début Si n<= alors | retourner 1 Si non | retourner Fibo (n-1) + Fibo (n-2) Fin si Fin

COMMUNICATIONS PAR AFFICHE

Maths et concret : le choix de partir du réel

Gilles Damamme
Université de Caen Normandie

RÉSUMÉ

Nous faisons ici le bilan de 20 années de travail au sein de l'IREM (Institut de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques) sur le thème « Des mathématiques en prise avec le réel » où notre postulat de départ a été de partir d'un questionnement issu de situations réelles pour utiliser des outils mathématiques appropriés (et non l'inverse). Décliné dans un premier temps sous la forme d'un travail sur le thème : « Mathématiques et consommation », il s'est élargi à un thème plus large « Mathématiques et compréhension du monde ». Nous indiquons les enjeux de notre travail, les réussites, les obstacles, les transpositions possibles dans un autre contexte et les perspectives à notre travail.

1. PRÉSENTATION DE NOTRE TRAVAIL

1.1 Notre intention

Notre intention de départ a été de faire des maths en lien avec « la vraie vie » et pas uniquement des mathématiques servant de base à des métiers spécialisés ou à « apprendre à raisonner ». Nous ne souhaitions pas non plus illustrer des notions mathématiques par des exemples pris dans des situations réelles plus ou moins bien choisis. Un des premiers termes thèmes qui nous a semblé intéressant est celui de la consommation puisque dans les sociétés occidentales, toute l'économie est basée sur la « société de consommation ». Nous avons ensuite dans un deuxième temps réfléchi sur la manière dont les mathématiques peuvent être un outil de façon beaucoup plus large.

1.2 Le contexte, les enjeux

Notre travail s'est fait en France, en langue française, dans le cadre spécifique de l'IREM (Institut de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques) où nous avons pu travailler conjointement entre enseignants de collège, de lycée et d'université.

Un des enjeux est l'aspect citoyen de notre travail, un autre enjeu est de répondre enfin à la question : « à quoi ça sert les maths? », question que se posent si souvent les élèves et leurs parents. Enfin c'est l'occasion d'approfondir le côté « outil » des notions mathématiques alors qu'une grande partie de l'enseignement est consacrée à l'aspect « objet » de ces notions mathématiques.

1.3 Nos activités

1.3.1 Documents

Nous avons écrit 3 livres : « Maths à crédit », « Mieux consommer grâce aux mathématiques » (tome 1 et 2), produit de nombreux documents (dont des vidéos) notamment en ligne.

Nous avons aussi participé à un projet de Éduscol sur les mathématiques et le quotidien.

1.3.2 Formations

Nous avons animé des stages de formation initiale pendant plusieurs années dans l'académie de Caen, et aussi un atelier en 2005 aux journées nationales de l'APMEP à Caen.

1.3.3 Conférences, expérimentations

J'ai donné plusieurs conférences (Paris, Limoges, Brest, Nantes etc.) notamment sur le thème « Maths et consommation ». Nous avons fait de nombreuses expérimentations dans nos classes respectives (collège, lycée, université). Personnellement, j'ai inclus dans mon cours de maths en AES (Administration, Économie et Sociale) à l'université un chapitre spécifique sur les crédits et un chapitre intitulé « Des maths pour mieux consommer ».

2. UN PREMIER BILAN

2.1 Les réussites

Une des premières réussites que nous avons obtenues est de restaurer une motivation chez des élèves ou étudiants habituellement réfractaires aux maths. Une autre a été de développer une autonomie citoyenne face à notre société de consommation où de plus en plus de gens se trouvent en situation de surendettement.

2.2 Les obstacles...

Même si on leur pose des problèmes très concrets, de nombreux élèves ou étudiants restent persuadés que les mathématiques ne servent pas dans la vie de tous les jours. La seule utilité qu'ils voient parfois aux maths est d'obtenir des (bonnes) notes et un diplôme. De plus des données réalistes qui ne sont pas choisies de façon à ce que les calculs soient simples peuvent accentuer la difficulté à se confronter au réel.

2.3 Et comment les contourner...

Une des premières manières de permettre aux élèves ou professeurs de s'approprier une situation est de leur demander quelle question éveille telle situation : par exemple, nous proposons d'observer des tickets de grattage aux professeurs venus en formation continue et nous leur demandons de créer un exercice à partir de ces tickets. Une autre est de transposer la situation dans l'univers de l'apprenant : par exemple, plutôt que de faire calculer un coût de crédit immobilier à un élève de collège, nous lui donnerons un exemple de crédit pour acheter un scooter. Enfin il s'agit de trouver un équilibre entre situation d'apprentissage et problèmes de la vie réelle : parfois on simplifiera un peu les données tout en veillant à ce qu'elles restent réalistes afin que l'élève ne se retrouve pas d'emblée face à une situation trop complexe.

3. QUELQUES EXEMPLES D'ACTIVITÉS

3.1 Consommation, crédit

Quelques exemples d'exercices en lien avec la consommation : calcul mental pour comparer l'achat par lots ou à l'unité dans des magasins, calcul de pourcentages, analyse de soldes, comparaison de plusieurs réductions sur des offres publicitaires, évaluation d'assurance, calcul d'un simple crédit, comparaison d'un crédit classique avec un crédit renouvelable (Les crédits renouvelables sont des crédits avec des mensualités dégressives relativement complexes à calculer et aux taux très élevés, responsables de nombreuses situations de surendettement dans les pays occidentaux, qui ont fait l'objet d'une étude particulière dans le tome 2 de notre ouvrage sur les maths et la consommation).

3.2 Jeux de grattage

Nous avons produit des exercices sur les jeux de hasard en examinant plus spécifiquement les jeux de grattage : en effet ils représentent en France un chiffre d'affaires de plusieurs milliards d'euros et le hasard y intervient d'une manière assez spécifique. De les examiner en détail permet de changer notre regard sur le fonctionnement de ces jeux. Nous avons produit un article (DAMAMME 2020) et 3 vidéos sur ce sujet.

3.3 La machine à pain

Voici un exercice sur le thème : « Fabriquer du pain soi-même » :

> Madame Halimi a acheté une machine à fabriquer du pain 40 €. Pour faire du pain avec cette machine, elle utilise des paquets de préparation pour pain spéciaux à base de farine, levure, etc., chaque paquet d'un kilo coûtant 0,95 €. Pour faire un pain d'environ 1,1 kilo, il lui faut 750 grammes de préparation et 360 millilitres d'eau. En deux ans, elle a fait 300 pains de cette taille. 1° Combien de kilos de préparation a-t-elle utilisé pour faire ses 300 pains ? 2° En comptant le prix de la machine, à combien lui sont revenu les 300 pains ? 3° Sachant que le prix des pains spéciaux vendus en commerce est d'environ 4,20 € le kilo, combien aurait-elle payé si elle avait acheté les 300 pains ? 4° Madame Halimi a-t-elle réalisé une économie ?

Pour créer l'énoncé de l'exercice en 2010, nous avons fait le choix d'évaluer la rentabilité de la machine sur deux ans. Le prix de la machine et des préparations pour pains spéciaux correspondent à des prix réels. Par contre l'évaluation du prix des pains spéciaux dans le commerce a été plus difficile, car il y a de nombreuses sortes de pains spéciaux et leur prix varie selon le type de magasin ou selon la boulangerie. Dans l'exercice, on a négligé le prix de l'eau et l'on n'a pas tenu compte du prix de l'électricité utilisée par la machine à pain, qui n'est pas négligeable, mais difficilement évaluable de manière simple par l'utilisateur. Néanmoins il ne change pas la conclusion de l'exercice : fabriquer du pain soi-même de manière régulière est rentable, et permet même une économie substantielle. Par contre, l'hypothèse faite dans l'exercice d'utiliser la machine pour faire des pains spéciaux est importante car le pain blanc a un prix inférieur et l'économie n'est alors pas la même. Sa conclusion semble toute simple, mais en discutant récemment avec un ami ayant acheté une machine à pain, il m'a dit qu'il n'était pas persuadé que fabriquer soi-même son pain avec la machine qu'il avait acquise lui permettait de faire des économies. Par contre l'exercice ne restitue qu'une information quantitative. Il ne dit rien par exemple sur la patience nécessaire pour que la fabrication du pain à l'aide d'une machine devienne une tache répétitive, sur la qualité du pain fabriqué et comment celle-ci peut évoluer avec l'acquisition d'un savoir-faire au fil du temps.

Cet exercice fournit un « patron » qui peut être réactualisé ou adapté à une situation légèrement différente : par exemple dans une classe chaque élève pourra - si sa famille achète des pains spéciaux - se référer au prix où elle les achète ; il pourra aussi se référer à la farine qu'il pourrait utiliser (par exemple ne pas utiliser une préparation tout faite) et aussi à sa situation personnelle : est-ce qu'il habite loin de la boulangerie ? Fait-elle du très bon pain ? Dispose-t 'il d'un peu de temps pour faire lui-même son pain ? etc... Cela permet aussi après une première expérimentation de rectifier ou d'affiner des données, et même la forme de cet exercice.

Par contre le fait de choisir d'évaluer la rentabilité de la machine sur un temps donné aboutit à un problème arithmétique qu'on peut résoudre assez facilement et qui est naturel. Si on avait posé la question : au bout de combien de temps la machine devient rentable ? On aurait abouti à une situation affine qui satisfait le professeur mais qui n'est pas forcément la méthode naturelle à laquelle on songe en premier pour résoudre ce genre de question.

En revanche, d'utiliser une méthode algébrique où on compare la croissance d'une fonction affine et d'une fonction linéaire qui peuvent être représentées par deux droites permet de généraliser à de nombreux problèmes. Néanmoins ce n'est pas une attitude que l'on a naturellement dans la résolution d'un problème concret.

3.4 Foot, météo, médecine etc.

Le football peut aussi fournir de nombreuses situations où l'on peut parler de mathématiques. L'avantage qu'il soit un sport très populaire permet de motiver les élèves : par exemple de se poser la question si, à 5 ou 6 journées de la fin du championnat, des équipes sont définitivement sauvées de la relégation ou si une équipe est sûre d'être championne permet de faire de petites démonstrations relativement simples et concrètes. De se poser la question si une équipe ayant 45 points à cinq journées de la fin (dans le championnat français où il y a 20 clubs) est certaine d'être sauvée de la relégation permet de faire la distinction entre une estimation statistique et une vérité mathématique.

Nous avons aussi utilisé les statistiques pour faire de la prospective en météorologie : ainsi nous nous sommes posé la question de savoir si le réchauffement climatique (que nous avons constaté localement sur une étude statistique en Normandie lors des 70 dernières années) engendrait plus de précipitations, moins de précipitations ou peu de changement : la réponse qui n'apparaît pas clairement nous permet d'avoir une connaissance plus précise d'un sujet par nous-même plutôt que de se référer à une étude scientifique dont on admet le résultat. Cela peut être aussi l'occasion d'initier un « débat scientifique » cher à Marc Legrand (LEGRAND 1993), mais dans un cadre moins formel, où l'activité de recherche permet d'apporter des éléments de réponse sans forcément apporter des certitudes.

En médecine, de se demander si le fait qu'un test soit fiable à 90 % signifie que si l'on effectue ce test et qu'il soit positif, alors on a 90 % de chance d'être malade, permet de travailler sur les probabilités conditionnelles et de connaître un résultat que tout médecin devrait savoir.

4. En guise de conclusion

Voici un extrait de la conclusion d'un article où nous présentions le premier tome de « *Mieux consommer grâce aux mathématiques* :

> Ces exemples illustrent notre démarche d'accompagner les élèves (et les professeurs) afin qu'ils utilisent les mathématiques qu'ils ont apprises dans des situations réelles.
>
> Ils montrent le travail nécessaire en amont pour adapter l'exercice à la réalité. Ils montrent aussi que certains choix et approximations sont effectués avec la part d'arbitraire que cela implique. Le professeur devra donc guider par moment les élèves vers ces choix, tout en étant à l'écoute de solutions alternatives proposées par les élèves.
>
> Ce long travail de défrichage offre ensuite un terrain propice aux réflexions didactiques.
>
> De nombreux exercices sont en lien avec le programme du socle commun. Dans beaucoup de cas, les unités sont conservées, avec l'objectif que cette conservation des unités apporte plus de sens à l'exercice.
>
> Les exercices ayant été pour la plupart tirés de la vie courante, ils correspondent à l'esprit « Real life » des études PISA. Ils abordent aussi parfois les thèmes de convergence (problème d'énergie, de santé, d'écologie) ce qui est un objectif des programmes depuis quelques années.
>
> Plusieurs exercices offrent l'occasion de pratiquer le calcul mental, plus de manière réfléchie qu'automatique, avec parfois des approximations à faire qui offriront une grande diversité dans la manière d'effectuer le calcul.
>
> Enfin rappelons que notre but est de montrer que les mathématiques peuvent aider à une démarche citoyenne en permettant par exemple de déjouer les pièges de la société de consommation.

Un des points importants est la transposition de notre travail dans un autre contexte : en effet dans les pays africains, la société de consommation est moins implantée ou de façon différente que dans les pays occidentaux ; il y a donc une réflexion importante à avoir pour transposer ces activités dans ce nouveau contexte.

La quatorzième étude ICMI (ICMI 2007) a porté sur la modélisation et Barbosa (BARBOSA 2006) s'est posé la question d'évaluer la pertinence et les limites des modèles mathématiques. Notre travail offre un champ d'investigation pour avoir une réflexion sur le sujet.

Enfin pour prolonger cette réflexion sur les modèles, on peut l'étendre aux champs philosophique et économique : en effet en économie, les modèles se basent souvent sur l'accroissement du PIB et aussi, l'outil de mesure est très souvent les gains financiers. Néanmoins Angus Deaton a montré avec Daniel Kahneman qu'au-delà d'un certain palier de revenus, aux Etats-Unis, la qualité de vie ne semble plus s'améliorer. Et même si ce palier de revenus (75 000 $US par an) est déjà élevé, d'avoir une réflexion sur le sujet est loin d'être inutile...

BIBLIOGRAPHIE

ADAM, E. BOCK, A-M. DAMAMME G. RUSTIN C. et VENTELON, H. (2005) *Math à crédit.* Paris, Caen : IREM de Basse-Normandie, APMEP

ADAM, E. DAMAMME, G. et VENTELON, H. (2010) *Mieux consommer grâce aux mathématiques Tome 1.* Paris : Hermann

ADAM, E. DAMAMME, G. et VENTELON, H. (2012) *Mieux consommer grâce aux mathématiques Tome 2.* Paris : Hermann

BARBOSA, J.C (2006) Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. ZDM The International Journal of Mathematics Education 38, 293-301

BLUM, E, GALBRAITH, P. HENN, H & MOGENS, N (EDS); (2007) Modelling and applications in mathematics education – The 14th ICMI Study. New-York: Springer

DAMAMME, G. (2020) Tickets de grattage ou comment gagner 120 000 €. APMEP (éd.) : Au fil des maths N°535 (p23-27)

LEGRAND M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, Repères IREM, 10, (p. 123-158).

IDENTITIES, un projet européen pour promouvoir l'interdisciplinarité en sciences dans les apprentissages

Viviane Durand-Guerrier[1]
Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France
viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

Introduction

Le projet européen IDENTITIES[2,3] (Intégrer les disciplines pour élaborer une approche innovante de l'enseignement de l'interdisciplinarité pour la formation des enseignants afin de relever les défis de l'enseignement des sciences et des techniques) est un projet européen ERASMUS+ associant quatre pays et cinq universités : les universités de Barcelone (Espagne), de Bologne (Italie), de Crète (Grèce), de Montpellier (France) et de Parme (Italie), sur la période 2019-2022. Il est coordonné par Olivia Levrini, de l'Université de Bologne (voir annexe pour les membres du projet). Dans ce texte, je présente tout d'abord les motivations qui ont conduit à l'élaboration de ce projet, les principaux aspects innovants permettant de penser l'élaboration de modules à destination de futurs enseignants afin de favoriser la mise en place en classe de situations d'enseignement et d'apprentissage authentiquement interdisciplinaires. J'illustre ensuite ces choix en présentant brièvement la structure des modules développés dans le cadre du projet, et les différents modules déjà développés et testés.

1. Motivations, questions essentielles et objectifs[4]

Les enseignants et les formateurs d'enseignants ont un bagage disciplinaire et, généralement, dans de nombreux pays, ils ne sont pas formés à un dialogue interdisciplinaire fructueux, requis par les nouveaux besoins émergents. Dans le débat actuel sur l'enseignement des STEM, la signification de l'interdisciplinarité est vivement discutée (Thompson Klein, 2011). Dans IDENTITIES, nous partons du principe que la recherche de la signification de l'interdisciplinarité ne peut ignorer la signification des "disciplines" et de leurs identités épistémologiques. Le terme discipline contient la racine latine *discere* (apprendre). Les disciplines sont des réorganisations du savoir dans le but de l'enseigner et ont été construites pour aider les étudiants à comprendre progressivement les différentes catégories de problèmes, les approches, les outils et les critères permettant d'évaluer la justesse et l'efficacité d'une procédure, d'un raisonnement, d'un argument. Dans cette perspective, les disciplines peuvent encore jouer un rôle éducatif pertinent (Barelli et al., 2022).

Les questions que nous mettons à l'étude dans ce projet découlent de la tension entre ces deux aspects : comment préserver les potentialités des disciplines et aider les (futurs) enseignants à gérer utilement l'interdisciplinarité ? Quelles stratégies sont nécessaires pour préparer les étudiants universitaires qui deviendront les enseignants de demain à faire face à ces nouveaux défis dans l'enseignement secondaire supérieur.

---

[1] Nous présentons ici un travail collectif. La liste des participants au projet se trouve en annexe.

[2] Project number: 2019-1- IT02-KA203- 063184 - Funding programme: EU ERASMUS + KA2 -

[3] Integrate Disciplines to Elaborate Novel Teaching approaches to InTerdisciplinarity and Innovate pre-service teacher Education for STEM: https://identitiesproject.eu/fr/

[4] Ce paragraphe est une adaptation en Français de la présentation du projet sur le site du projet.

L'objectif principal du projet est de construire des modules d'enseignement et des cours innovants et transférables à utiliser dans des contextes de formation initiale des enseignants (par exemple, des programmes d'enseignement de la physique, des mathématiques ou de l'informatique dans le cadre de cours de maîtrise). Le thème central des modules est l'interdisciplinarité dans les domaines STEM, avec un accent sur les liens et l'imbrication entre la physique, les mathématiques et l'informatique. Plus précisément, les modules seront construits pour fournir aux (futurs) enseignants des compétences professionnelles à utiliser dans la conception et la mise en œuvre d'activités d'enseignement pour le lycée. Ils seront disponibles en accès ouverts en ligne à la fin du projet.

2. PRINCIPAUX ACCÈS INNOVANTS

Pour tenter de répondre aux objectifs ci-dessus, nous avons choisi de développer deux types de modules interdisciplinaires : 1/ des modules sur des sujets STEM avancés, intrinsèquement interdisciplinaires (ex : le changement climatique, l'intelligence artificielle, les applications quantiques) dont l'enseignement nécessite le soutien de nouveaux matériels ; 2/ des modules sur des sujets curriculaires interdisciplinaires concernant les problèmes à l'interface entre deux disciplines scolaires, visant à les rendre plus attractives, plus pertinentes et plus significatives.

Notre approche de l'interdisciplinarité est explicitement destinée à surmonter deux formes de banalisation : 1/ l'interdisciplinarité en tant qu'a-disciplinarité (composée uniquement de thèmes transversaux) ; 2/ l'interdisciplinarité en tant qu'utilisation instrumentale de concepts tirés d'une discipline (par exemple les mathématiques) pour résoudre un problème formulé dans une autre discipline (par exemple en physique). Le respect des IDENTITÉS épistémologiques des différentes disciplines et la recherche d'une "épistémologie de l'interdisciplinarité" émergente sont les principes de base de la conception des modules.

L'aspect le plus innovant de la conception concerne l'idée d'utiliser, dans les modules, des "activateurs épistémologiques et linguistiques", c'est-à-dire des concepts ou des thèmes épistémologiques et linguistiques capables d'activer un méta-niveau d'analyse à partir duquel les disciplines peuvent être observées, comparées et entrelacées, en allant et venant entre les détails et la vue d'ensemble. En effet, lorsque l'accent est mis sur les disciplines, il est nécessaire de se donner les moyens de reconnaître et d'analyser les types d'interactions entre les disciplines qui se produisent dans des contextes interdisciplinaires. Ceci est favorisé par l'identification d'objets à l'interface (en anglais *boundary objects*) et de mécanismes visant à travailler à l'interface (en anglais *boundary crossing*) (Akkerman & Bakker, 2011) ou encore en identifiant des domaines qui sont à l'interface de deux ou plusieurs disciplines (par exemple la cryptographie, un domaine à l'interface Mathématiques – Informatique) et les "activateurs épistémologiques", c'est-à-dire les concepts, méthodes ou thèmes clés qui caractérisent chaque discipline et invitent à des comparaisons réflexives significatives entre les disciplines (Ravaioli, 2020). Nous considérons également dans le projet la pertinence d'identifier des " activateurs linguistiques ", c'est-à-dire des concepts, des catégories, des formes de représentations linguistiques qui sont utilisés différemment dans les différentes disciplines : par exemple, un même concept peut avoir des modes de désignation ou de représentations symboliques différentes suivant les disciplines ; ou bien des modes de désignation ou de représentations symboliques apparemment identiques renvoient à des concepts de nature différentes selon les disciplines. On s'intéresse également aux types de discours et d'argumentation et aux régimes de la preuve suivant les disciplines.

3. STRUCTURE GLOBALE DES MODULES[5]

Les modules ont une structure générale similaire adaptée de la structure des sous-modules des parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants (Barquero, Bosch & Romo, 2018). Chaque module a adapté cette structure générale en fonction des principales questions qu'il souhaite aborder et le contenu et les activités spécifiques pour progresser conjointement sur l'émergence et l'analyse de l'interdisciplinarité. Tout au long de la mise en œuvre du module, les participants seront amenés à adopter différents rôles : *explorateurs* ; *étudiants*; *analystes*.

Sous-module 1 - Rôle de l'explorateur interdisciplinaire. Il s'agit d'expliciter la ou les questions initiales relatives à l'interdisciplinarité sur le thème choisi et chercher d'abord des réponses.

*Sous-module 2 - Rôle de l'étudiant faisant l'expérience de l'interdiscipl*inarité. Il s'agit de faire vivre une adaptation d'une proposition d'enseignement pour faire émerger l'interdisciplinarité.

Sous-module 3 - Rôle de l'analyste interdisciplinaire. Il s'agit de faire une analyse collective de l'expérience d'enseignement qui vient d'être vécue, notamment des analyses épistémologiques et linguistique de l'interdisciplinarité.

Sous-module 4 - Rôle des concepteurs interdisciplinaires et de l'enseignant. Il s'agit de mettre les participants en immersion dans les pratiques de l'enseignement secondaire liées aux activités développées précédemment.

4. MODULES DÉVELOPPÉS ET TESTÉS EN 2020 ET 2021

Quatre modules ont été développés et testés localement et dans le cadre d'une école d'été internationale en ligne en 2021. Ces quatre modules sont présentés en Anglais dans Barelli & al. (2022). Nous en donnons brièvement ci-dessous les principaux traits.

Deux de ces quatre modules d'enseignement concernent l'interdisciplinarité émergente dans les sujets STEM avancés : *nanotechnologies* et *évolution du coronavirus* ; les deux autres sont des modules curriculaires : *cryptographie* et *Parabole et mouvement parabolique*.

- Interdisciplinarité dans le domaine des nanotechnologies[6]

La justification du choix des nanosciences - nanotechnologies pour développer un module d'enseignement dans le cadre des STEM repose sur le fait que : 1) les nanosciences – nano technologies sont par nature un domaine interdisciplinaire, portant sur l'étude des phénomènes observés dans des structures et des systèmes extrêmement petits, dans lequel de nombreuses disciplines interagissent, notamment la physique, la chimie et la biologie 2) elles sont liées à de nombreuses applications et percées contemporaines dans le monde réel, 3) étant un domaine de recherche en développement, il donne l'occasion de découvrir de nouvelles méthodes et de nouveaux modes de pensée ainsi que de cultiver des points de vue sur la nature de la science et la nature de la technologie, et 4) il peut favoriser un questionnement des étudiants sur des questions socio-scientifiques pertinentes et des questions de citoyenneté responsable.

[5] Les paragraphes 2 et 3 reprennent des éléments de Barelli & al. (2022).
[6] *Interdisciplinary in the field of Nanotechnologies*, module développé par A. Nipyrakis, A. Kokolaki, I. Metaxas, E. Michailidi, and D. Stavrou.

- Un module interdisciplinaire sur la modélisation de l'évolution du coronavirus[7]

Le thème de la modélisation de l'évolution du coronavirus a été choisi en partie en raison de son intrusion dans notre vie quotidienne au début de l'année 2020. Les développeurs y ont reconnu un exemple authentique d'interdisciplinarité dans le domaine des STEM, ce qui a nécessité un effort collectif de mise en relation de différentes disciplines afin de pouvoir réagir face à des questions inattendues affectant profondément la vie quotidienne de chacun. La pandémie du COVID-19 a rendu visible le fait que les citoyens ont besoin de comprendre comment les mathématiques et les avancées scientifiques contribuent à la compréhension des phénomènes de société, et peuvent contribuer à leur traitement par le pouvoir politique. Le module qui a été développé dans le cadre du projet permet d'explorer 1/ le type de connaissances produit par les modèles et la modélisation, 2/ les manières d'interpréter leurs prédictions ; 3/ leur contribution à la compréhension d'une question sociétale complexe.

- Enseigner la cryptographie pour favoriser l'interdisciplinarité entre Mathématiques et Informatique[8]

La cryptographie est un domaine à l'interface entre les mathématiques et l'informatique. Les éléments mathématiques (comme les preuves, la théorie des nombres) et les éléments informatiques (comme la complexité informatique, la conception de systèmes, la programmation) sont fondamentaux pour résoudre les défis sociaux, technologiques et scientifiques que pose la cryptographie. De plus, certains éléments de cryptographie englobent des aspects entremêlés d'informatique et de mathématiques (par exemple, les fonctions à sens unique sont à la fois des fonctions mathématiques bien définies et des programmes qui répondent à des critères spécifiques de sécurité et d'efficacité). Dans le cadre de la recherche actuelle, cela stimule une dialectique entre les deux disciplines, à la fois de l'informatique vers les Mathématiques (par exemple, nécessitant de nouvelles recherches sur les courbes elliptiques) et en sens inverse (par exemple, l'utilisation de prouveurs de théorèmes pour vérifier les propriétés cryptographiques). Dans le module, la cryptographie est introduite en tant que question sociale de la société contemporaine après une présence de longue durée dans l'histoire de l'humanité, de la Grèce antique à nos jours. Le développement de l'informatique a mis en avant un nombre croissant de méthodes de cryptage, la plupart d'entre elles reposant sur l'étroite imbrication des mathématiques et de l'informatique. Dans l'ensemble du module, les activités ont été développées pour mettre en lumière des concepts disciplinaires importants, comme la complexité computationnelle et les graphes. Les spécificités de la cryptographie ont permis en outre de développer des situations didactiques avec un fort potentiel a-didactique par l'optimisation du milieu pour fournir des rétroactions pertinentes, notamment parce que les étudiants peuvent décider par eux-mêmes s'ils ont décrypté le message.

- Parabole and mouvement parabolique à l'interface entre physique and mathématiques[9]

Le module sur la parabole et le mouvement parabolique permet de mettre en valeur et de discuter les effets de la transposition didactique, dans une discipline donnée, d'un sujet qui relève, sur le plan épistémologique, d'une approche interdisciplinaire. Alors que la parabole comme objet

[7] *An interdisciplinary module about modelling coronavirus evolution*, développé par B. Barquero, E. Barelli, O. Romero, M. R. Aguada, J. Giménez, C. Pipitone, and G. Sala-Sebastià
[8] *Teaching cryptography to foster Interdisciplinarity between mathematics and computer* science, module développé par I. Bartzia, M. Lodi, M. Sbaraglia, S. Modeste, S. Martini, and V. Durand-Guerrier
[9] *Parabola and parabolic motion to cross boundaries between physics and mathematics,* module développé par S. Satanassi, L. Branchetti, O. Levrini, and P. Fantini

mathématique et le mouvement parabolique étudiés en physique sont intrinsèquement liés, on observe que les habitudes, les manuels et les pratiques scolaires, ont consolidé deux récits disciplinaires différents, qu'il s'agit de dépasser dans une perspective interdisciplinaire authentique. Ceci a conduit à structurer le module en six phases. Dans la phase 1, il s'agit de réfléchir sur la métaphore de la frontière et sur des exemples d'objets frontières pour se positionner sur le thème de l'interdisciplinarité. Ensuite, les phases 2 et 3 concernent à la fois l'analyse historique de la découverte du mouvement parabolique et une double analyse des textes historiques de Guidobaldo et Galilée. La phase 4 concerne l'analyse des différentes significations de la preuve en mathématiques afin de définir des critères pour analyser la preuve du mouvement parabolique de Galilée et d'exploiter le rôle structurel des mathématiques dans l'établissement de la physique comme discipline. Dans la phase 5, différentes définitions de la parabole en tant qu'objet mathématique ont été données, influencées par l'interaction entre les mathématiques et la physique au cours de nombreux siècles. Dans la phase 6, une leçon de conclusion a été conçue pour repenser les questions ouvertes dans la phase 1 après les activités interdisciplinaires.

5. Conclusion

Depuis le début du projet, le développement des modules a été conduit en interaction avec les approfondissements théoriques et les réflexions sur les moyens de permettre la mise en place d'une interdisciplinarité authentique en classe. La complémentarité entre les deux types de modules apparaît comme essentielle. Il faut noter cependant que ces deux catégories ne sont pas étanches : en effet, le module cryptographie pourrait être considéré comme relevant des deux catégories, et la modélisation pourrait aussi être considérée dans le cadre d'un module curriculaire.

Bibliographie

AKKERMAN, S. F., & BAKKER, A. (2011). Boundary crossing and boundary objects. Review of educational research, 81(2), 32-169.

BARELLI, E. & al. (2022) Disciplinary Identities in interdisciplinary topics: challenges and opportunities for teacher education. *ESERA 2021 Proceedings*

BARQUERO, B., BOSCH, M., & ROMO, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM, 50*(1), 31-43.

RAVAIOLI, G. (2020). Epistemological activators and students' epistemologies in learning modern STEM topics. Ph.D. theses. Alma Mater Studiorum - Università di Bologna. Ph.D. in Physics.

THOMPSON KLEIN, J. (2011) Une taxinomie de l'interdisciplinarité. *Nouvelles perspectives en sciences sociales*, 7 (1), 15–48.

Annexe - Les membres du projet

Eleonora Barelli[1], Berta Barquero[2], Oscar Romero[2], Maria Rosa Aguada[2], Joaquim Giménez[2], Carolina Pipitone[2], Gemma Sala-Sebastià[2], Argyris Nipyrakis[3], Athanasia Kokolaki[3], Ioannis Metaxas[3], Emily Michailidi[3], Dimitris Stavrou[3], Iro Bartzia[4], Michael Lodi[1], Marco Sbaraglia[1], Simon Modeste[4], Simone Martini[1], Viviane Durand-Guerrier[4], Sara Satanassi[1], Paola Fantini[1], Laura Branchetti[6], Olivia Levrini[1], Thomas Hauberger[4], Nathan Lombard[4], Alberto Saracco5

1 Université de Bologne, Bologne (Italie) ; 2 Université de Barcelone, Barcelone (Espagne) ;

3 Université de Crète, Rethymno (Grece) ; 4 Université de Montpellier, Montpellier (France) ;

5 Université de Parme, Parme (Italie) ; 6 Université de Milan, Milan (Italie)

Culture afro-brésilienne et scénarios de recherche sur l'utilisation du jeu mankala

Elisângela Bastos de Melo Espindola
José Guilherme Marques Pereira
Université Fédérale Rurale de Pernambuco - UFRPE

RÉSUMÉ

Au Brésil, à partir de la loi no 10.639, de 9 janvier 2003, qui a établi l'obligation de l'enseignement de l'histoire et culture afro-brésilienne dans le système éducatif national, les professeurs cherchent à développer l'utilisation de diverses ressources pour répondre à cette loi. C'est dans ce contexte national que nous présentons un aperçu, à la période de 2004-2021, des tendances de recherches et corrélations entre dix-neuf travaux à propos de l'usage des jeux africains, de type *mankala*, pour l'enseignement des (ethno) mathématiques.

Mots-clés: *mankala*, enseignement des mathématiques, système éducatif brésilien, ethnomathématique.

1. INTRODUCTION

Conformément aux dispositions de la loi no 10.639, de 9 janvier 2003, le Conseil National de l'Éducation (CNE) a lancé la Résolution nº 1, de 17 de juin de 2004 que précise les directives curriculaires pour les établissements scolaires et pour la formation initiale et continue des enseignants, en prévoyant, par exemple :

> Art. 3. L'éducation des relations ethnico-raciales, l'étude de l'histoire et de la culture afro-brésilienne et de l'histoire et de la culture africaine seront développées à travers contenus, compétences, attitudes et valeurs, à être établis par les institutions de l'éducation et de ses enseignants […]. (Brésil, 2004, p.30-32)

Dans cette perspective, par l'enseignement des mathématiques, c'est prévu l'étude des apports des racines africaines, identifiés et décrits par le programme ethnomathématiques; en considérant que les études ethnomathématiques cherchent des éléments culturels qui peuvent servir comme point de départ pour des activités mathématiques dans l'enseignement.

De ce fait, d'abord dans cet article, nous présenterons brièvement le concept d'ethnomathématique. Ensuite, nous présenterons les procédures méthodologiques pour la recherche documentaire, comme une étape de travail préalable à une étude empirique sur les jeux du type *mankala*. Enfin, nous présenterons les pri-ncipaux résultats.

2. L'ETHNOMATHÉMATIQUE

Selon D'Ambrósio (2014, p. 103) l'ethnomathématique est « l'ensemble des modalités, styles, arts et techniques pour expliquer, apprendre, connaître, faire avec, faire dans les environnements naturels, sociaux, culturels et imaginaires d'une culture ». Autrement dit, l'ethnomathématique ce sont les techniques de l'étude dans une communauté donnée. Gerdes (2009, p.15) considère que l'ethnomathématique peut être définie comme « l'anthropologie culturelle des mathématiques et de l'enseignement mathématique, c'est-à-dire que l'ethnomathématique est l'étude des pratiques et des idées mathématiques dans ses rapports avec l'ensemble de la vie culturelle et sociale ». D'Ambrosio (2009) explique :

> Les individus et les peuples ont, tout au long de leur existence et à travers l'histoire, créé et développé des instruments de réflexion, des instruments matériels et intellectuels [que j'appelle ticas] pour expliquer, comprendre, connaître, apprendre à connaître et faire [que j'appelle mathématiques] en guise de réponse aux besoins de survie et de transcendance dans différents environnements naturels, sociaux et culturels [que j'appelle ethnos] (D'Ambrosio, 2009, p.60).

D'après Gerdes (2009) à travers le concept d'ethnomathématique on attire l'attention sur le fait que la mathématique, avec ses techniques et vérités constitue un produit culturel: « il ressort que chaque peuple, chaque culture, et chaque sous-culture développe sa propre mathématique, dans une certaine mesure, spécifique » (p.15). Ces aspects font ressortir les influences de facteurs socioculturels sur l'enseignement, l'apprentissage des mathématiques. De ce fait, nous posons la question : Comment la recherche sur l'enseignement des mathématiques à la lumière de la culture africaine et afro-brésilienne s'est déroulée après la loi no 10.639, de 9 janvier 2003? Quelles sont les tendances des recherches et les corrélations entre l'enseignement des (ethno) mathématiques et les jeux du type *mankala* ?

3.MÉTHODOLOGIE

La présente étude a été développée dans le Laboratoire Scientifique d'Apprentissage, de Recherche et d'Enseignement - LACAPE da UFRPE. Nous réalisons cette recherche documentaire comme une étape de travail préalable à une étude empirique sur les jeux du type *mankala*. La recherche documentaire peut être comprise comme l'ensemble des techniques et modalités permettant de sélectionner l'information dans une base de données structurée en fonction de critères de recherches propres à l'utilisateur. Nous utilisons les procédures suivantes :

- Le choix des bases de données en ligne : le catalogue de thèses et mémoires de la Coordination du perfectionnement du personnel de l'enseignement supérieur (CAPES)[11] et le site de la Société Brésilienne de Éducation Mathématique (SBEM)[22] ;
- Filtres : Catalogue de thèses et mémoires de la CAPES : Sciences Humaines, Education, Enseignement, Enseignement des Mathématiques. Site de la SBEM : actes du *Encontro Nacional de Educação Matemática* (ENEM).
- Mots-clés : *mankala* ou *mancala* (titres et résumés des mémoires, thèses et/ou articles).
- Période : année 2004 (Résolution nº 1 - CNE) jusqu'au 2019 (dernier ENEM) ; 2004 – 2021 (mémoires et thèses inscrits dans le catalogue de la CAPES).

Après l'identification de onze mémoires et sept articles, nous avons sélectionné les mots-clés de chacun des résumés de ces travaux. Ensuite, nous avons utilisé le logiciel Iramuteq[33] (Interface de R pour les analyses multidimensionnelles de textes et de questionnaires) pour l'analyse de similitude de ces mots-clés. Ce type d'analyse permet de décrire des classes lexicales en calculant les co-occurrences, c'est-à-dire le nombre de fois où les mots s'affichent en même temps dans un corpus textuel. Ainsi, nous pouvons repérer six classes de liaisons qu'expriment les tendances de recherches et les corrélations entre les mémoires et articles.

[1] CAPES: https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/
[2] SBEM: http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais
[3] Disponible en : http://www.iramuteq.org/

4. LE *MANKALA* ET L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Les mémoires identifiés dans le catalogue de la CAPES (tableau 1) et dans les actes du ENEM (tableau 2) révèlent que la plupart des recherches sur le *mankala* et l'enseignement de l'histoire et de la culture afro-brésilienne se concentrent dans les régions sud-est et nord-est du Brésil. Il y a une absence de recherches dans les régions nord et sud. La première région est habitée principalement par des descendants d'indigènes et la seconde par des descendants européens.

Auteurs	Titres et liens	Université
Pereira (2011)	Le jeu africain *mankala* et l'enseignement des mathématiques face à la loi 10.639/03.	Université Fédérale de Ceará (UFCE)
Santos (2014)	*Mankala colhe três* : en jouant et en exploitant les connaissances mathématiques à travers des situations didactiques.	Université Fédérale de Pernambuco (UFPE)
Silva (2016)	Ethnomathématique et afrocentrisme : voies d'investigation des possibilités à travers les jeux africains ouri et tarumbeta dans la mise en œuvre de la loi fédérale 10.639/03.	Université de l'État de Rio de Janeiro (UERJ).
Barreto (2016)	Enseigner les mathématiques à travers des jeux éducatifs africains : une étude de cas dans une classe d'éducation des jeunes et des adultes (Eja) dans uneécole municipale d'Aracaju.	Université Fédérale de Sergipe (UFS)
Azevedo Neto (2016)	Viens jouer avec moi : en mobilisant les connaissances mathématiques à travers des adaptations du jeu *mankala* awalé.	Université Fédérale de Mato Grosso do Sul (UFMS)
Pereira (2016)	Potentialités du jeu africain *mankala* IV pour le champ de l'éducation des mathématiques, de l'histoire et de la culture africaine.	Université Fédérale de Ceará (UFC)
Oliveira (2018)	*Mankala* : un jeu de stratégie contribuant à l'apprentissage des mathématiques.	Université Fédérale de Rio de Janeiro (UFRJ)
Valença (2018)	Mathématiques, africanité et formation des enseignants à l'école quilombola.	Université de Pernambuco (UPE)
Moreira (2018)	Expériences didactiques-pédagogiques parmi les enseignants des écoles publiques de Sabará et Obuasi/Ghana et le renforcement des africanités.	Université Fédérale de Minas Gerais (UFMG)
Ribeiro (2019)	Histoire des mathématiques : interdisciplinarité et le ludique-pédagogique dans l'apprentissage des mathématiques.	Université de l'État de Paraiba (UEPB)
Correia (2020)	L'afroetnomathématique dans l'enseignement de base : une proposition pour approcher les cultures africaines par l'utilisation des jeux en classe.	Université Fédérale Rurale de Rio de Janeiro (UFRJ)

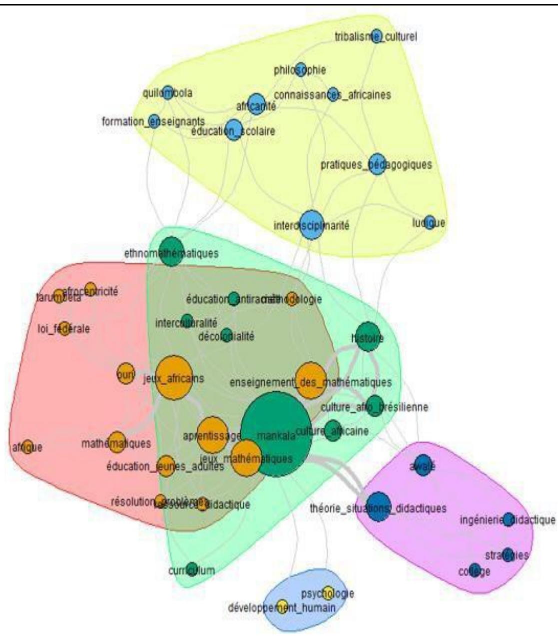
Tableau 1*. Les mémoires (2010-2019)*

Auteurs	Titres et liens	Université
Santos & CunhaJunior (2010)	L'utilisation du jeu mancala comme outil pour le développement des compétences d'enseignement, d'apprentissage et de mathématiques.	Université Fédérale de Ceará (UFC)
Souza (2013)	*Mankala* : jeu, résolution de problèmes et expression socioculturelle africaine.	Université Bandeirantes de São Paulo (UNIBAN)

Brianez & Gama(2013)	Les jeux africains dans l'enseignement des mathématiques : une approche interdisciplinaire du *mankala*.	Université Fédérale de São Carlos (UFSCar)
Oliveira, Lyra-Silva & Gonçalves Júnior (2016)	Le jeu *mankala* comme ressource ludique et pédagogique dans le processus d'enseignement-apprentissage des élèves de l'éducation de base.	Université Fédérale de Goiás (UFG)
Campelo, Barbosa & Ribeiro (2019)	Le jeu africain *mankala* comme semeur d'une éducation antiraciste, décoloniale et interculturelle à l'école pluriculturelle odé kayodê.	Université Fédérale de Goiás (UFG)
Tuchapesk (2019)	Ethnomathématique et interdisciplinarité à l'école : étude du *mankala*.	Université de São Paulo (USP)
Santos (2019)	Le processus de dévolution et le caractère adidactique dans les situations impliquant le jeu *mankala colhe três*.	Université Fédérale dePernambuco (UFPE)

Tableau 2. *Les articles publiés dans les actes du Encontro Nacional de Educação Matemática (2010-2019)*

L'ensemble des mots-clés présents dans les ouvrages sur *mankala* (tableaux 1 et 2) est visible sur l'arbre des liaisons lexicales (figure 1). Ainsi, nous pouvons repérer six classes de liaisons qu'expriment les tendances de recherches et les corrélations entre les différents travaux.



Classe 1 : L'interdisciplinarité, les pratiques pédagogiques, l'enseignement des mathématiques, l'africanité, les connaissances africaines et la formation des enseignants.

Classe 2 : L'ethnomathématique, l'histoire, la culture africaine, la culture afro-brésilienne et le programme scolaire.

Classe 3 : Loi 10.639/03 et l'enseignement des mathématiques.

Classe 4 : Les jeux africains, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, l'éducation antiraciste, l'interculturalité, decolonialité.

Classe 5 : La psychologie, le développement humain et le *mankala*.

Classe 5 : L'ingénierie didactique, la théorie des situations didactiques et l'usage des jeux africains au collège.

Figure 1. *Analyse de similitude des mots-clés des articles (ENEM) et mémoires (CAPES)*

Dans *la classe 1* nous trouvons en relief le rôle de la formation des enseignants spécifique pour travailler dans les établissements scolaires situés dans les communautés « quilombolas[4] », c'est-à-dire des lieux habités historiquement par noirs depuis la fin du XVIe siècle. En prenant en compte que l'une des caractéristiques de l'ethnomathématique est par nature d'être un domaine interdisciplinaire, les chercheurs s'intéressent à discuter, par exemple, les connaissances des enseignants de mathématiques sur l'histoire et la culture africaine et afro-brésilienne (ex. Valença, 2018, tableau 1).

La *classe 2* laquelle l'ethnomathématique est relié aux éléments : histoire, culture africaine et afro-brésilienne et programme scolaire nous pouvons remarquer, par exemple, l'habilité prescrite par le ministère national pour le primaire (8-9 ans) : (EF35EF01)[4] - *Expérimenter et profitez des animations et jeux populaires du Brésil et du monde, y compris ceux d'origine indigène et africaine, et les recréer, en valorisant l'importance de cette patrimoine historique et culturel*. Face à ce genre d'habilité dans le programme, quelques chercheurs ont développé l'analyse de la tendance croissante de l'usage des jeux africains dans l'enseignement de mathématiques. Les éléments de la *classe 2* et de la *classe 3* qui mettent en lumière le lien entre la loi 10.639/03 et l'enseignement des mathématiques sont fortement liés à ceux de la *classe 4* (ex. Pereira, 2011, tableau 1). En ce qui concerne la *classe 4*, les éléments « l'éducation antiraciste, interculturalité, decolonialité, l'enseignement et apprentissage des mathématiques » sont objet de discussions plus large sur les aspects anthropologiques, philosophiques, sociopolitiques et épistémologiques de l'éducation nationale. De certaine façon en lien avec des études sur les relations entre la psychologie, le développement humain et les jeux de type *mankala* (*classe 5*).

La *classe 6* est fondée sur les liens entre l'ingénierie didactique, la théorie des situations didactiques et l'usage des jeux africains au collège. Par exemple, Santos (2014, 2019, voir tableaux 1 et 2) à propos de l'élaboration et la mise en œuvre des séances, en utilisant le jeu ouri (figure 2), il présente les finalités didactiques suivants : développer des stratégies pour quantifier mentalement; résoudre des problèmes avec des situations mixtes : additif et multiplicatif ; diviser par calcul mental; cartographier les possibilités ; explorer les possibilités de distribution des graines à parts égales, sur les sommes dans les cases ; reconnaître les diviseurs d'un certain nombre; identifier les multiples d'un nombre; reconnaître les nombres premiers et composés.

Figure 2*. Jeux Mankala colhe três – Ouri*.

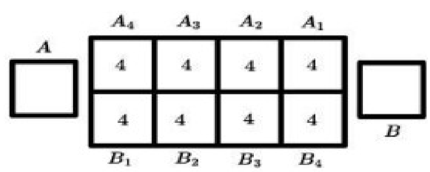


Figure 3*. Mankala awalé*

À son tour, Azevedo Neto (2016), il a travaillé sur la stratégie, l'estimation, calcul mental, raisonnement, logique, division, notion de probabilité, pourcentage et analyse combinatoire à travers le jeu d'awalé (Figure 3, voir tableau 1). En particulier sur la mise en œuvre en classe, nous identifions différents types de jeux proposés aux élèves. En effet, nous considérons que les aspects didactiques relatifs à l'usage des jeux *mankala* sont un terrain de recherche fructueux prise en compte le travail dans la classe, sans perdre de vue les dimensions culturel, social et politique dans laquelle s'insère inévitablement l'ethnomathématique.

5. EN GUISE DE CONCLUSION

Comme éléments déclencheurs de ce travail nous prenons en compte la loi nº 10.639 (Brésil, 2003) et les études sur l'ethnomathématiques. Dans la période analysée (2004-2021), nous repérons une augmentation du nombre de professeurs et de chercheursintéressés aux études sur la culture africaine et la culture afro-brésilienne dans tous les domaines. En particulier, c'est remarquable l'accent sur

[4] Pour savoir plus: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

l'utilisation des jeux africains dans les établissements scolaires, au-delà de ceux situés dans les communautés « quilombolas ». En revanche, dans certaines régions du Brésil, l'absence de la diffusion des pratiques pédagogiques vers ce sujet, nous amène à considérer qu'il est donc indispensable de continuer à l'étudier afin d'identifier les pistes d'amélioration et de fournir le support à l'entreprised'autres recherches. En particulier, au laboratoire LACAPE- UFPE, nous avons débuté cette année à la formation initiale des enseignants de mathématiques le présent travail et nous continuons à raffiner les analyses sur les pratiques pédagogiques avec les jeux *Mankala*.

BIBLIOGRAPHIE

BRASIL. (2004). Diretrizes *curriculares nacionais para a educação das relações étnico-raciais e para o ensino de história e cultura afro-brasileira e africana.* Brasília: Conselho Nacional de Educação. Ministério da Educação. http://media.ceert.org.br/portal-4/pdf/diretrizes.pdf/

BRASIL. (2003). *Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003*. Brasília: Presidência da República, Casa Civil. http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/l10.639.htm.

D'AMBROSIO, U. (2014). Las bases conceptuales del programa etnomatemática. *Revista Latinoamericana Etnomatemática*, 7(2), 100-107.

D'AMBROSIO, U. (2009). Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade. 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

GERDES, P. (2009). *L'Ethnomathématique en Afrique*. Maputo, Mozambique : CERME.

LISTE DES PARTICIPANTES ET PARTICIPANTS

À ADiMA3

LISTE DES PARTICIPANTES ET PARTICIPANTS À ADiMA 3

N°	NOM	PRENOM	E-MAIL	PAYS
1.	ABDELJAOUAD	Mahdi	mahdi.abdeljaouad@gmail.com	TUNISIE
2.	ABOUHANIFA	Said	saidabouhanifa@yahoo.fr	MAROC
3.	ACHOUR	Samia	samiaachour@yahoo.fr	TUNISIE
4.	ADEL	Fadhel	afadhel34@yahoo.fr	TUNISIE
5.	ADIHOU	Adolphe	Adolphe.Adihou@usherbrooke.ca	CANADA
6.	AFFOGNON	Gervais	gervais.affognon@imsp-uac.org	BENIN
7.	AKROUTI	Inen	akroutiinen@yahoo.fr	TUNISIE
8.	ALIBI	Imen	paraalibi@gmail.com	TUNISIE
9.	AMINE	Mayeda	mooody.ame@gmail.com	PALESTINE
10.	AYED	Besma	ayed_besma@yahoo.fr	TUNISIE
11.	BARKAOUI	Fethi	fethibarkaoui54@gmail.com	TUNISIE
12.	BASTOS DE MELO ESPINDOLA	Elisângela	elisangela.melo@ufrpe.br	BRESIL
13.	BEBBOUCHI	Rachid	rbebbouchi@hotmail.com	ALGERIE
14.	BEN ALI	Yasmina	benalijasmin@gmail.com	TUNISIE
15.	BEN NEJMA	Sonia	sonianejma@yahoo.com	TUNISIE
16.	BENHADJALI	Belkis	belkisbha@gmail.com	TUNISIE
17.	BOURAOUI	Tarek	Tarak.bouraoui@gmail.com	TUNISIE
18.	BRINSI	Lamjed	lamjedbrinsi72@gmail.com	TUNISIE
19.	CHAFRA	Moez	moez.chafra@utm.tn	TUNISIE
20.	CHELLOUGUI	Faiza	chellouguifaiza@yahoo.fr	TUNISIE
21.	DAMAMME	Gilles	gilles.damamme@unicaen.fr	FRANCE
22.	DARRAGI	Soumaya	soumaya.darragi@ipest.ucar.tn	TUNISIE
23.	DEKHILI	Brahim	dekhilibrahim@gmail.com	TUNISIE
24.	DHIEB	Mounir	mounirdhieb@yahoo.fr	TUNISIE
25.	DLISSI	Hatem	dlissihatem@gmail.com	TUNISIE
26.	DORIER	Jean-Luc	Jean-Luc.Dorier@unige.ch	SUISSE
27.	DURAND-GUERRIER	Viviane	viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr	FRANCE
28.	ELIDRISSI	Abdallah	abdellah_elidrissi@yahoo.fr	MAROC
29.	FARES	Saja	saja.fares@yahoo.com	PALESTINE
30.	GBAGUIDI	Ahonankpon Florent	florent.gbaguidi@imsp-uac.org	BENIN
31.	GHARBI	Mohamed	mhmdbrhg@gmail.com	TUNISIE
32.	GHEDAMSI	IMENE	ighedamsi@yahoo.fr	FRANCE
33.	HABIBI	Meriam	hbibi_meriam@hotmail.com	TUNISIE
34.	HADDAD	Marwa	Marwa.haddad@laposte.net	TUNISIE
35.	HADDAD	Sassi	haddad.sassi@icloud.com	TUNISIE

36.	IBN HAJ ALI	Najoua	najoua.hajali@essect.u-tunis.tn	TUNISIE
37.	JABRANE	Anis	anis1.jabrane@gmail.com	TUNISIE
38.	KEFI	Mohamed Hatem	hatem_kefi@hotmail.fr	TUNISIE
39.	KHALLOUFI-MOUHA	Faten	fkhalloufi@yahoo.fr	TUNISIE
40.	KHELIFA	Samiha	samiha_khelifa@yahoo.fr	TUNISIE
41.	KILANI	Imed	kilanis2006@yahoo.fr	TUNISIE
42.	KLOUZ	Ajda	ajda.klouz@gmail.com	TUNISIE
43.	KOUDOGBO	Jeanne	Jeanne.Koudogbo@USherbrooke.ca	CANADA
44.	KOUKI	Rahim	rahim.kouki@ipeiem.utm.tn	TUNISIE
45.	KRAIEM	Tesnim	Tesnim.kraiem@enit.utm.tn	TUNISIE
46.	LECORRE	Thomas	thomas.lecorre@cyu.fr	FRANCE
47.	MALONGA	Fernand	malongaf@gmail.com	CONGO
48.	MERCAT	Christian	Christian.Mercat@math.cnrs.fr	FRANCE
49.	MESQUITA	Ana	alobomesquita2021@gmail.com>	FRANCE
50.	MESSAOUDI	Abdellatif	messaoudi.abdellatif@gmail.com	TUNISIE
51.	MIADI	Sabrine	miadisabrine@yahoo.fr	TUNISIE
52.	MIZIENNE	Mahdia	miziennem@yahoo.fr	TUNISIE
53.	MOHAMED SAGAYAR	Moussa	mmsagayar@gmail.com	NIGER
54.	MRABET	Slim	mrabet_slim@yahoo.fr	TUNISIE
55.	NACEUR	Abdelmajid	abelmajid.naceur@uvt.tn	TUNISIE
56.	NAFTI	Foued	foued.nafti@uvt.tn	TUNISIE
57.	NAJAR	Ridha	ridha.najar@uqat.ca	CANADA
58.	NGUEMBOU NANA	Giscard	giscardnana@yahoo.fr	CAMEROUN
59.	OKE	Eugène	eugene.oke@imsp-uac.org	BENIN
60.	OUESLATI	Semia	pr.samia@gmail.com	TUNISIE
61.	OUNI	Mohamed Wardi	ouniwardi@yahoo.fr	TUNISIE
62.	PAVLOPOULOU	Kalliopi	pavlopoulou@math.ntua.gr	GRECE
63.	REBAI	Noamen	noamen.rebai@enit.utm.tn	TUNISIE
64.	SAHBI	Sana	sahbisana@outlook.fr	TUNISIE
65.	SAIDI	Mongi	mongisaidi03479@gmail.com	TUNISIE
66.	SLIMI	Sanaa	slimi-sanae@outlook.fr	MAROC
67.	SOGBAVI	Donatien	donatien.sogbavi@imsp-uac.org	BENIN
68.	SOKHNA	Moustapha	moustapha.sokhna@ucad.edu.sn	SENEGAL
69.	SOLTANI	Walid	wsoltani2022@gmail.com	TUNISIE
70.	SQUALLI	Hassane	Hassane.Squalli@USherbrooke.ca	CANADA
71.	TRABELSI	Emna	trabelsichaibiemna@gmail.com	TUNISIE
72.	ZNAIDI	Amna	amna.znaidi@ipeiem.utm.tn	TUNISIE